MATEMÀTIQUES DE COLORS

Ariadna Matabosch Reixach
2n de Batxillerat Tecnològic
Promoció 2010-2011
Gabriel Plana
Institut la Garrotxa

ÍNDEX

INTRODUCCIÓ 4

ESTUDI DEL CUB 6

1. El cub com a Poliedre Regular 7
   - 1.1. Sòlids Platònics 7
   - 1.2. El cub geomètric 9
2. Desplegaments en el pla 10
   - 2.1. Desplegaments simètrics 10
   - 2.2. Desplegaments possibles 10
   - 2.3. Desplegaments impossibles 12
3. Nombres Reals que es poden trobar en un cub 13
   - 3.1. Conceptes previs 13
   - 3.2. Aplicació de teoremes matemàtics 14
   - 3.3. Resultats finals 19
4. Moviments que deixen un cub invariable 20
   - 4.1. Moviments Giratoris 20
   - 4.2. Composició de Moviments Giratoris 30
   - 4.3. Simetries 43
   - 4.4. Composició de Simetries 47
   - 4.5. Composició de Moviments Giratoris i Simetries 49
5. Estructures Algebraiques 64
   - 5.1. Estructura de Grup 64
     - 5.1.1. Primer exemple 65
     - 5.1.2. Segon exemple 66
     - 5.1.3. Tercer exemple 67
     - 5.1.4. Quart exemple 67
   - 5.2. Estructura d'Anell 69
     - 5.2.1. Primer exemple 70
   - 5.3. Estructura de Cos 72
     - 5.3.1. Primer exemple 73
   - 5.4. Estructura d'Espai Vectorial 76
     - 5.4.1. Primer exemple 77
   - 5.5. Resum general de les propietats de les Estructures Algebraiques 83
   - 5.6. Quina Estructura Algebraica forma un Cub? 84
6. El cub en l'Art i en l'Arquitectura 87
   - 6.1. Art 87
   - 6.2. Arquitectura 89

EL CUB DE RUBIK 92

7. Ernö Rubik i la Història del seu cub 93
8. Patents i Variants 97

9. Campionats oficials 105
10. Algorismes de Resolució 108
10.1. Mètode per a principiants 108
10.1.1 Notació Simple 108
10.1.2 Resolució per a principiants 111
10.2. Mètode per a experts (Fridrich) 126
10.2.1 Notació avançada 126
10.2.2 Resolució per experts 134
10.3 Mètode a cegues (Blindfold) 137
10.4 Altres modalitats de resolució 138

CONCLUSIONS 139

VALORACIÒ PERSONAL 140

AGRAÏMENTS 141

BIBLIOGRAFIA 142

INTRODUCCIÓ

Una de les preguntes més comunes que els grans fan als petits és: Què vols ser quan siguis gran? I pot ser una de les preguntes més difícils de contestar si no tens molt clar que el teu futur és fer alguna de les feines més conegudes com professor, metge, policia... Però a mesura que vas avançant amb els estudis i et vas fent gran, has d'anar prenent decisions, tot i no tenir clar el que voldràs treballar en un futur, has de decidir què t'agradaria continuar estudiant.

Després d'haver pensat diferents alternatives, m'he adonat que sempre m'han cridat molt l'atenció les matemàtiques. A batxillerat, es treballa més profundament cada assignatura, i el món dels números, m'apassiona i penso que pot valdre la pena dedicar-hi els meus estudis futurs.

Trobo que el món matemàtic, és un tema gairebé tabú, ja que quan algú em demana el que vull estudiar, i jo contesto: Matemàtiques!, tothom em mira estranyat de que em puguin interessar i acaben dient-me: Matemàtiques? Amb lo difícils que són!
M'interessa molt el que pot venir després d'aquest treball, ja que podré iniciar una carrera universitària fent allò que m'agrada.

Lligant el tema dels meus possibles estudis universitaris matemàtics i el Cub de Rubik com a element molt relacionat amb les matemàtiques, vaig pensar que seria interessant estudiar-lo, a partir dels meus coneixements matemàtics, i aprofundir-hi.

- Has intentat mai fer el Cub de Rubik? De ben segur que sí, que alguna vegada a la teva vida, t'ha arribat a les teves mans un cub, i has intentat resoldre'l. Com a molt, el primer dia deus haver aconseguit fer una cara i amb molta sort, i amb algú que t'ho expliqui, has arribat a fer-lo gairebé tot.

Resoldre el Cub de Rubik no és bufar i fer ampolles, ja que requereix lògica, paciència i, sovint, un manual d'instruccions. El Cub de Rubik està molt relacionat amb el món lògic i matemàtic, ja que la seva resolució té una base matemàtica. A més de la funció lògica, el cub, és vist com un dels entreteniments més coneguts del món.

L'objectiu final d'aquest treball és l'elaboració d'un manual que permeti la resolució del cub a qualsevol persona que no tingui cap coneixement previ.

Per arribar a aquest final, primer hauré d'estudiar el cub com a cos platònic, la seva configuració, característiques, propietats, desenvolupaments, els diferents girs i simetries que conté, estructures... com a pas previ a un estudi matemàtic més profund que condueixi a la seva resolució.

També em proposi esbrinar els orígens del Cub de Rubik i del seu creador, i conèixer les seves variants: cub de 4x4x4, cub de 5x5x5... el Megaminx...

Per completar el treball també m'agradaria estudiar la presència del cub en la nostra societat: en la construcció, en l'art, en el joc...

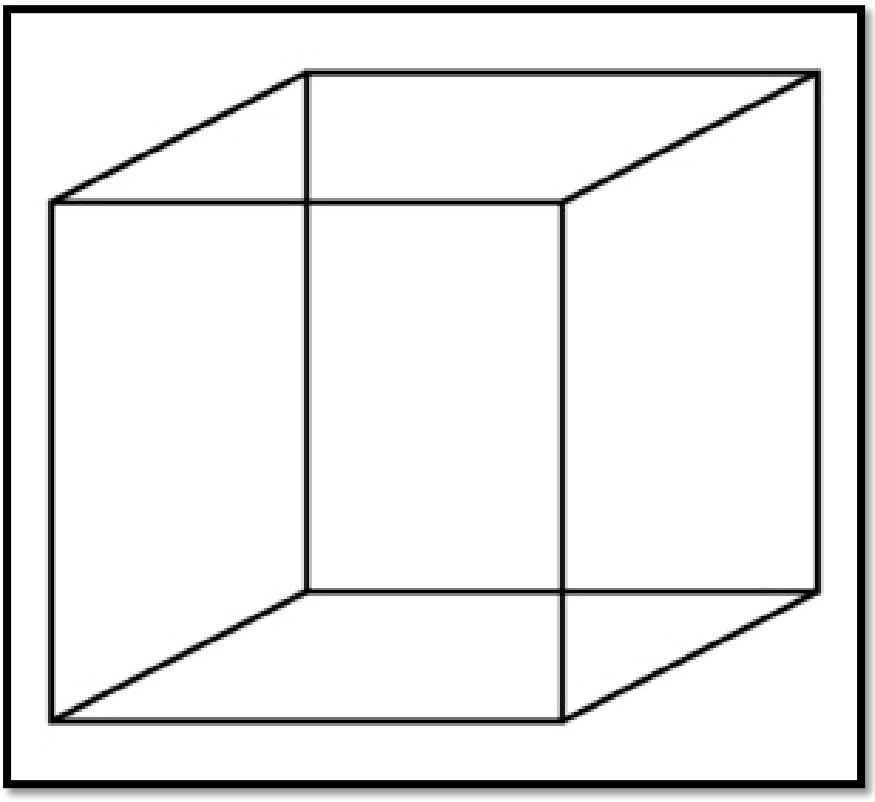
El problema més important que crec que em trobaré, serà en que, el meu nivell per a poder fer un estudi exhaustiu del cub, és molt limitat i per això, serà necessari dedicar algunes hores amb el professor de matemàtiques perquè m'orienti amb tot el que pugui necessitar per fer el treball.

En aquest treball, serà necessari l'explicació de moltes coses mitjançant representacions gràfiques. Penso utilitzar el programa *GeoGebra*, que m'ajudarà molt a l'hora de representar figures geomètriques i elements diversos.

Per treballar l'apartat dels desplegaments, utilitzaré un material utilitzat Creator, i que està format per uns quadrats, triangles, pentàgons... que es poden unir i separar, i formar diferents figures geomètriques. D'aquesta manera, podré assegurar el resultat final.

Em fa molta il·lusió fer aquest treball i tinc pressa per començar-lo. Tinc ganes d'aprendre i de gaudir-hi i espero que tot el que faci també em serveixi pels meus estudis posteriors.

ESTUDI DEL CUB



1. EL CUB COM A POLIEDRE REGULAR

Un poliedre regular, és un cos tridimensional, les cares del qual són polígons regulars, que s'uneixen de la mateixa manera al voltant de cada vèrtex del polígon.
En total existeixen cinc poliedres regulars, que també s'anomenen sòlids platònics.

1.1 SÒLIDS PLATÒNICS

Grup al qual pertanyen el tetraedre, el cub (o hexàgon regular), l'octaedre, el dodecaedre i d'icosàedre. També es coneixen com a cossos platònics, cossos còsmics, sòlids pitagòrics, sòlids perfectes, poliedres de Plató, o poliedres regulars convexos.
Aquest grup, presenta un seguit de propietats molt estrictes que són les següents:

- **Regularitat:**
  - Totes les seves cares són polígons regulars iguals
  - En tots els seus vèrtex s'hi uneixen el mateix número de cares i el mateix número d'arestes.
  - Totes les seves arestes tenen la mateixa longitud.
  - Tots els angles díedres que formen les seves cares, entre sí, son iguals.
  - Tots els seus vèrtex son convexos als de l'icosàedre.

- **Simetria:** és la correspondència exacta en la disposició regular de les parts o punts d'un cos o figura en relació a un punt (centre), una recta (eix) o un pla.
  - Tots ells presenten un centre que equidista de les seves cares, dels seus vèrtex i de les seves arestes.
    Aquesta simetria es dóna quan es tracta d'una transformació en la que cada punt se li associa un altre punt, i ha de complir les següents condicions:
    - El punt i la seva imatge han d'estar a la mateixa distància d'un punt anomenat centre de simetria.
    - El punt, la seva imatge i el centre de simetria han de pertànyer a la mateixa recta.

    Com a resum, podem dir que amb aquest tipus de simetria, s'obté la mateixa figura amb una rotació de 180 graus.
  - Tots ells tenen simetria axial respecte una sèrie d'eixos de simetria que passen pel centre de simetria anterior.
    La simetria axial és aquella que comporta una transformació respecte un eix de simetria, en el qual, a cada punt d'una figura s'hi associa un altre punt anomenat imatge, que compleix les següents condicions:
    - La distància d'un punt i la seva imatge a l'eix de simetria, ha de ser la mateixa.

- El segment que uneix un punt amb la seva imatge, ha de ser perpendicular a l'eix de simetria.
  En aquest tipus de simetria, es conserven les distàncies però no el sentit dels angles.

- Tots ells tenen simetria especular o bilateral respecte una sèrie de plans de simetria (o plans principals), que els divideixen en dues parts iguals.

* Com a conseqüència geomètrica d'aquests tres trets de simetria, es poden dibuixar tres esferes particulars, en tots els sòlids platònics, i les tres esferes estan centrades al centre de simetria del poliedre.

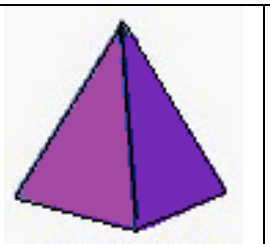
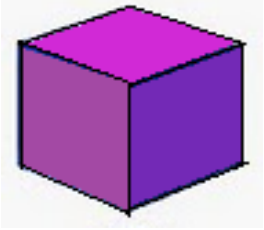
- Una esfera inscrita: tangent a totes les seves cares al seu centre.
- Una esfera tangent a totes les arestes al seu centre.
- Una esfera circumscrita, que passa per tots els vèrtex del poliedre.

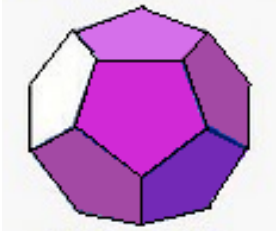
- **Conjugació:** demostra que si es dibuixa un poliedre utilitzant com a vèrtex els centres de les cares d'un sòlid platònic, s'obtenen altres sòlids platònics, anomenant conjugat del primer, amb tants vèrtex com cares tenia el sòlid inicial, i el mateix nombre d'arestes. El poliedre conjugat d'un dodecaedre és un icosàedre, i al revés; i el d'un cub és un octaedre, i al revés; i el poliedre conjugat d'un tetraedre és un altre tetraedre.

- **Teorema de poliedres d'Euler:** explica que el número de cares d'un poliedre platònic més el seu nombre de vèrtex és sempre igual al seu nombre d'arestes més dos:
  c = número de cares del poliedre
  v = número de vèrtexs del poliedre
  a = número d'arestes del poliedre

$$c + v = a + 2$$

Representació gràfica dels cinc poliedres regulars que existeixen:

		
Tetraedre	**Hexaedre o cub**	**Octaedre**

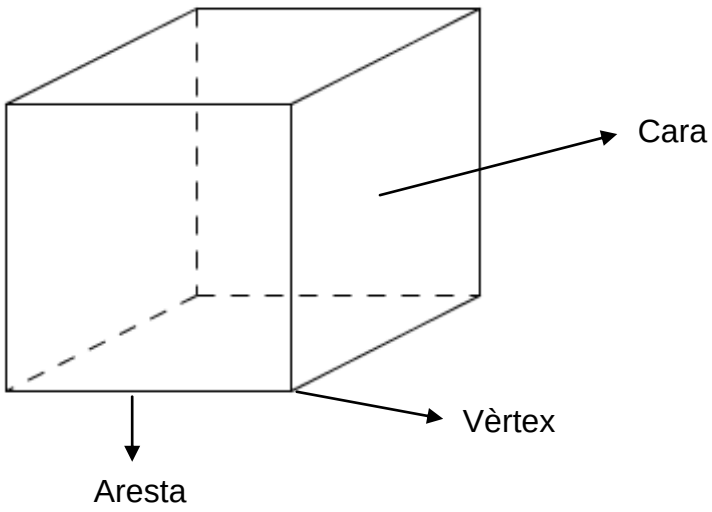
	
Dodecaedre	**Icosàedre**

NOM	FORMA DE LES CARES	Núm. DE CARES	Núm. DE VÈRTEXS	Núm. D'ARESTES
Tetraedre	Triangle	4	4	6
Hexaedre o Cub	Quadrat	6	8	12
Octaedre	Triangle	8	6	12
Dodecaedre	Pentàgon	12	20	30
Icosàedre	Triangle	20	12	30

1.2 EL CUB GEOMÈTRIC

Geomètricament, un cub és un objecte sòlid tridimensional format per sis cares iguals que s'uneixen per arestes i cada tres cares es troben a un vèrtex. El cub també es pot anomenar hexaedre regular i és un dels Sòlids platònics.
Un cub està format per les següents parts:

- **Cara:** Un cub té sis cares, i totes elles són quadrats, per tant cada cara té quatre costats iguals i cada un dels quatre angles interiors, són angles rectes.
- **Aresta:** segment que es troba al punt d'unió entre dues cares. Un cub té 12 segments. Degut a que totes les cares són quadrats i per tant, iguals entre elles, les 12 arestes del cub tenen la mateixa mida.
- **Vèrtex:** punt on es troben tres arrestes. Un cub té 8 vèrtex.

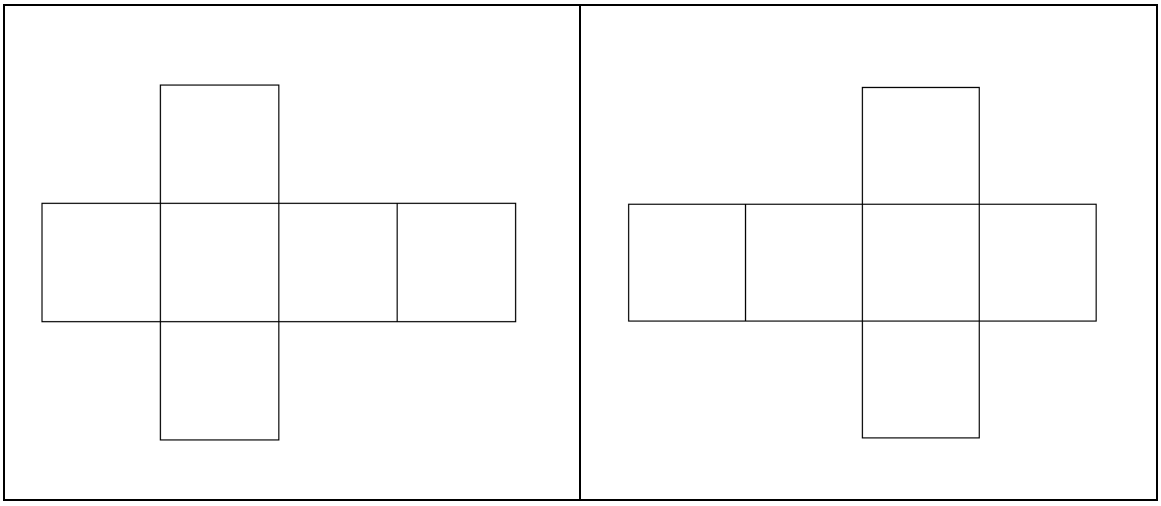


2. DESPLEGAMENTS EN EL PLA

El cub, com s'ha dit anteriorment, està format per sis quadrats idèntics que conjuntament formen les sis cares del cub. Aquestes cares poden tenir diferents desplegaments en el pla.

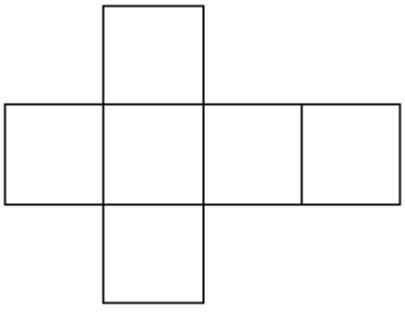
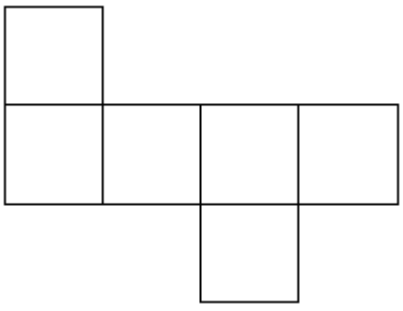
2.1 DESPLEGAMENTS SIMÈTRICS

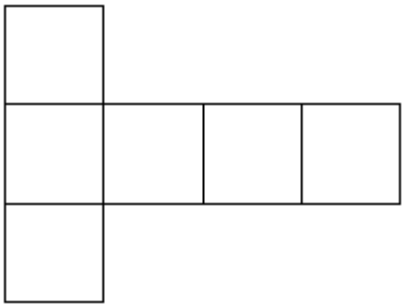
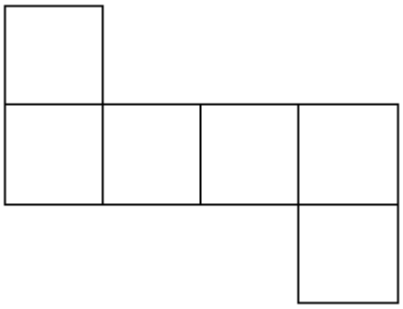
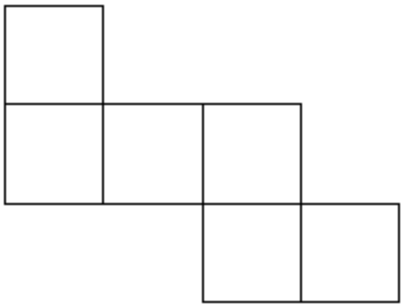
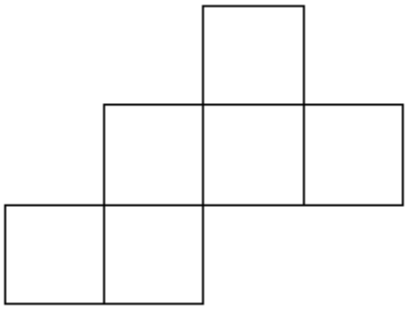
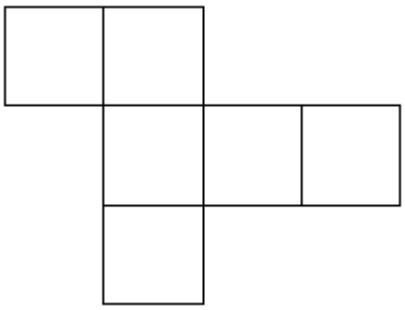
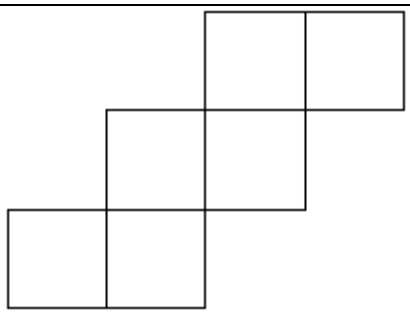
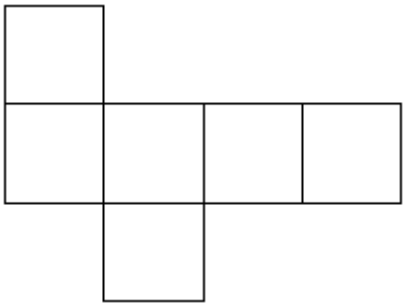
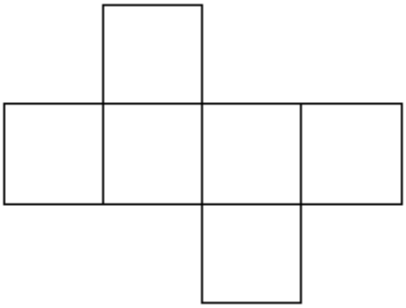
He trobat molts desplegaments aparentment diferents però observant-los amb atenció es veu que n'hi ha molts de repetits ja que són el producte d'una simetria o d'una rotació obtinguda a partir d'un desplegament. Per exemple: Els dos desplegaments de la imatge següent són idèntics ja que tenen la mateixa forma i la mateixa disposició dels quadres. La única cosa que canvia és que estan girades.



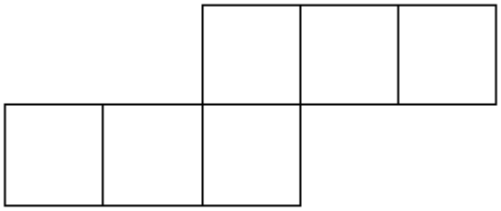
2.2 DESPLEGAMENTS POSSIBLES

Així, finalment he trobat que només existeixen els onze desplegaments representats a continuació:

Desplegament 1	**Desplegament 2**
	

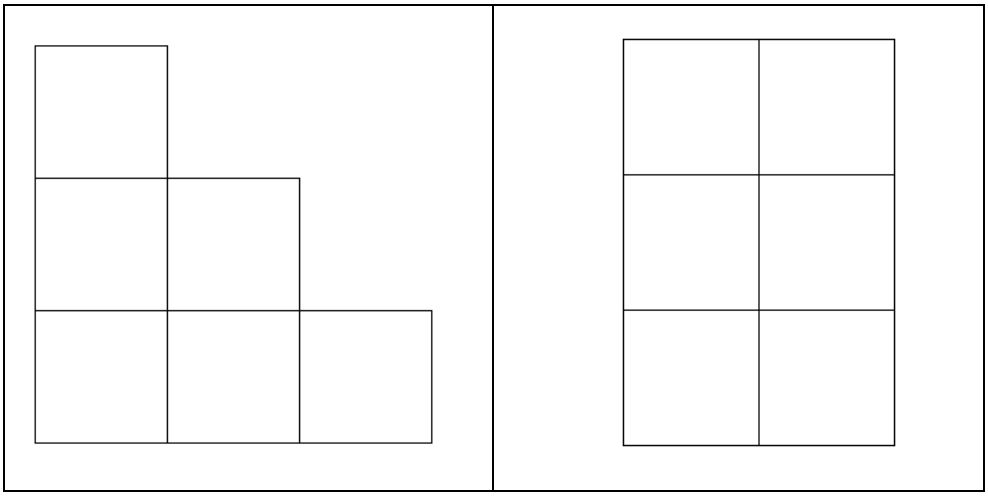
Desplegament 3	**Desplegament 4**
	
Desplegament 5	**Desplegament 6**
	
Desplegament 7	**Desplegament 8**
	
Desplegament 9	**Desplegament 10**
	

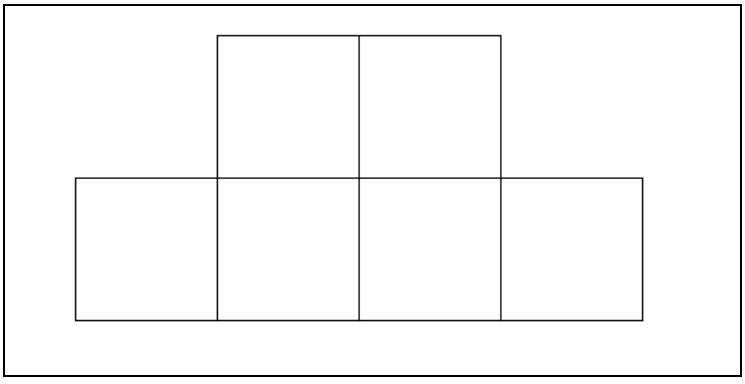
Desplegament 11



2.3 DESPLEGAMENTS IMPOSSIBLES

També he observat que existeixen diverses agrupacions de 6 quadrats amb les quals és impossible confeccionar un cub com per exemple:



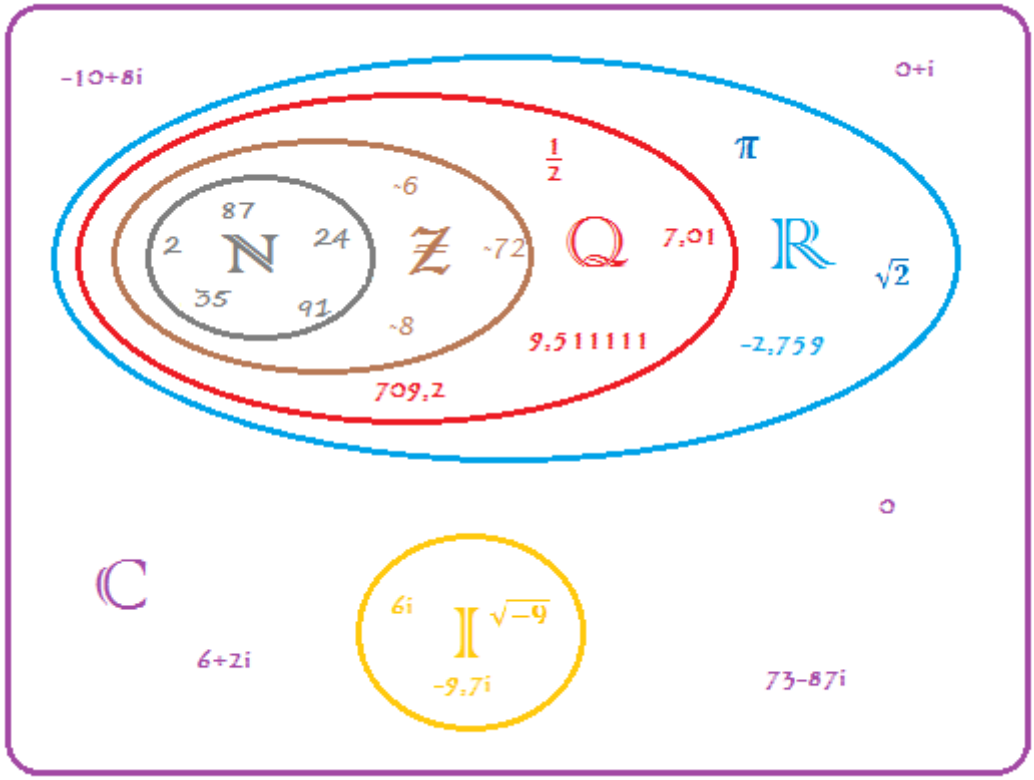


3. NOMBRES REALS QUE ES PODEN TROBAR EN UN CUB

3.1 CONCEPTES PREVIS

A continuació detallaré dues classificacions dels nombres:

- Localització dels Nombres Reals dins el conjunt de tots els números existents:

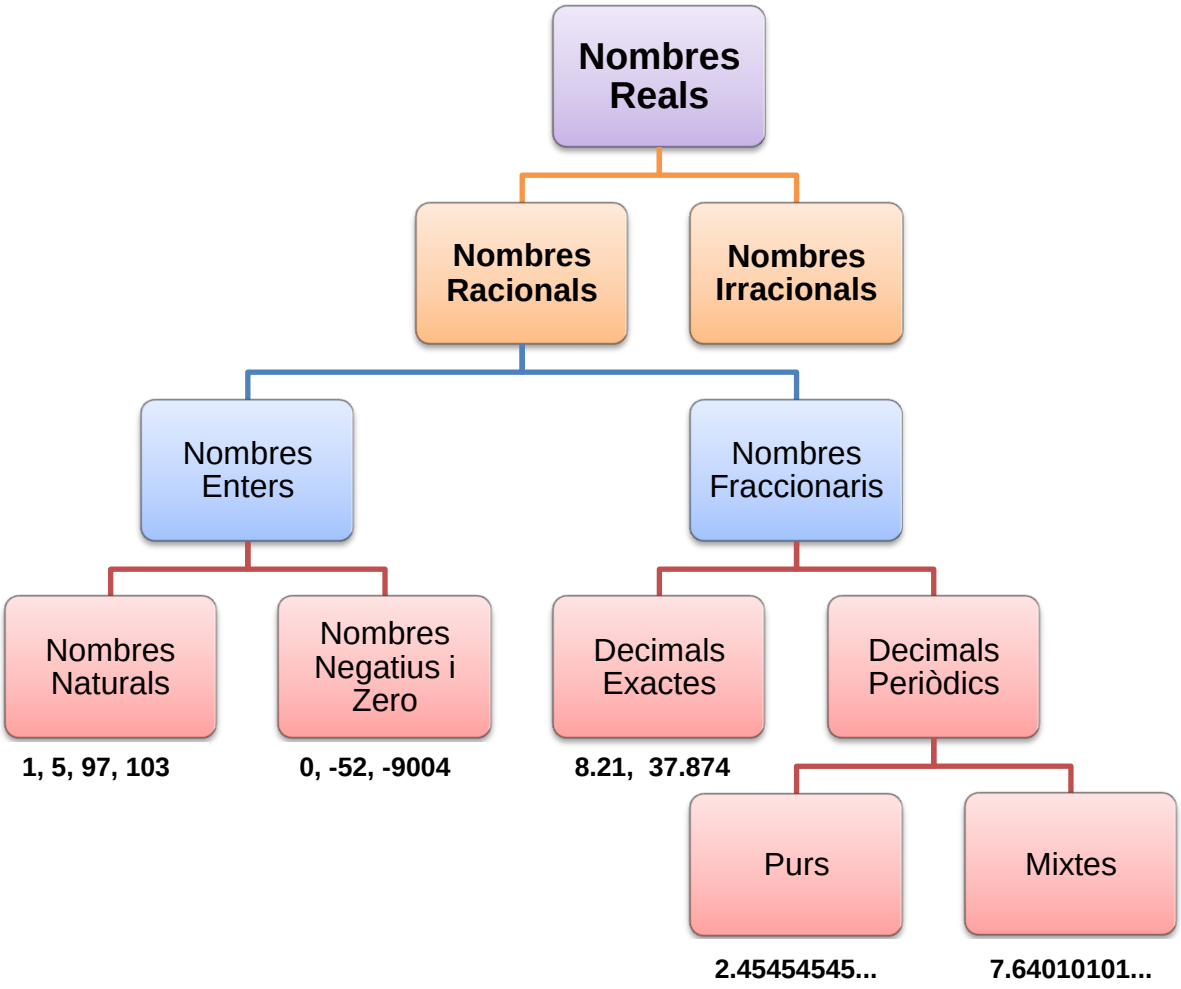


En aquest dibuix podem veure les diferents categories en què es classifiquen els diferents nombres. Cada grup s'expressa amb una lletra:

1. ℕ: **Nombres naturals**. Són tots els números positius a partir de l'1, sense decimals. Per tant els expressem de la següent manera: {1,2,3,4,...}.
2. ℤ: **Nombres enters**. Són tots els números naturals, negatius, i el zero, mai amb decimals. Els expressem de la següent manera: {...,-2,-1,0,1,2,...}.
3. ℚ: **Nombres racionals**. Són tots els enters i els decimals que s'obtindran dividint dos nombres enters en excepció del zero.
4. ℝ: **Nombres reals**. Són els nombres racionals i els irracionals. Es podria definir com tots els números que existeixen en una línia real. Els expressem de la següent manera: (-∞,+∞)
5. 𝕀: **Nombres imaginaris**. Els agrupem en un grup separat de la resta degut a que el seu resultat és negatiu un cop elevats al quadrat. Els expressem de la següent manera: a"*i*"

6. ℂ: **Nombres complexos**. És la combinació entre nombres reals i nombres imaginaris. Els expressarem de la següent manera: b+a"*i*", on a i b són reals i la *"i"* és la unitat imaginària. Ex: 6+3i.

- Classificació dels nombres reals depenent de la seva estructura:
El conjunt de nombres reals s'estructuren de la següent manera

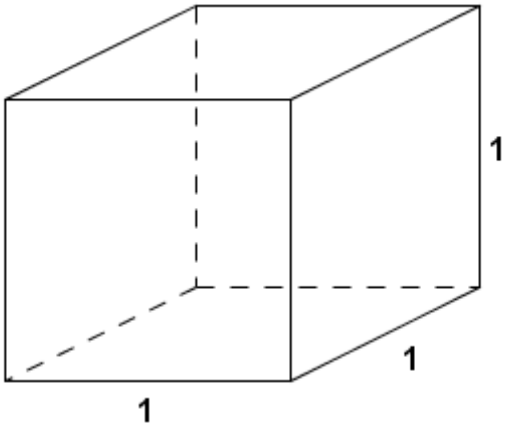


3.2 APLICACIÓ DE TEOREMES MATEMÀTICS

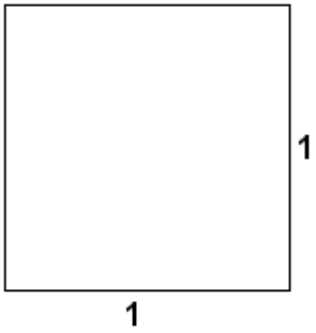
A continuació, aplicaré algun Teorema matemàtic existent, per tal de poder trobar alguns resultats aplicats en el cub.

Observant el cub, la característica principal d'aquest és que està format per sis cares iguals unides per dotze arestes i vuit vèrtexs.

Podria donar infinites dimensions a un cub però, per tal de facilitar els càlculs, prendré el cub unitari. Recordem que les arestes d'aquest mesuren una unitat.

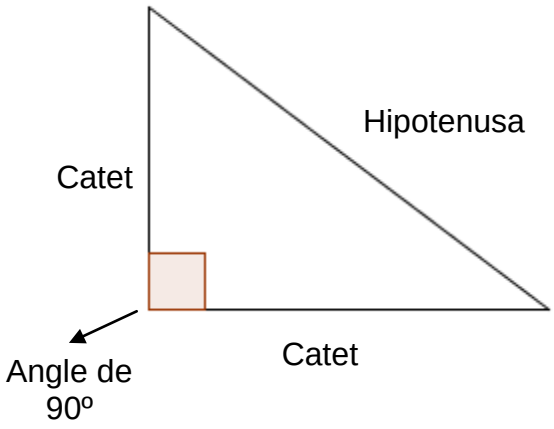


Cal tenir en compte que, si cada aresta del cub mesura una unitat, cada costat d'un dels sis quadrats també mesurarà una unitat.



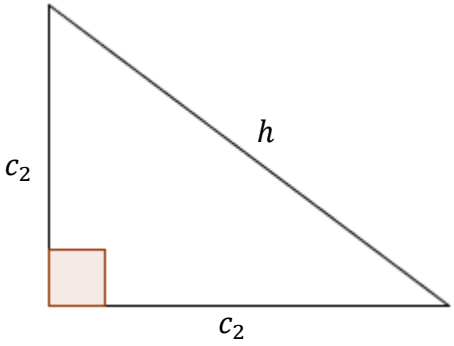
A continuació, agafaré una cara del cub i partiré de que tots els seus costats mesuren 1. Si divideixo aquesta cara en dues parts amb una diagonal, obtindré dos triangles rectangles. Per saber la distància entre els dos punts extrems de la diagonal, aplicaré el Teorema de Pitàgores. El Teorema de Pitàgores el definim com a teorema que afirma que en tot triangle rectangle, el quadrat de la hipotenusa és la suma dels quadrats dels dos catets.
Les parts principals d'un triangle rectangle el quan hi podem aplicar el Teorema de Pitàgores són les següents:

- Angle de 90º
- Catets: dos costats units per l'angle de 90º
- Hipotenusa: diagonal que uneix els dos catets, oposada a l'angle de 90º.



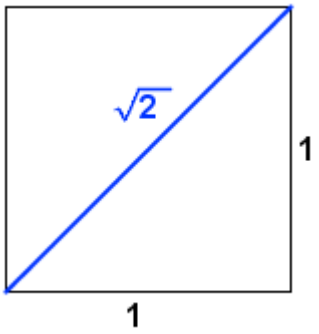
La fórmula del Teorema de Pitàgores és:

$$h^2 = c_a^2 + c_b^2$$

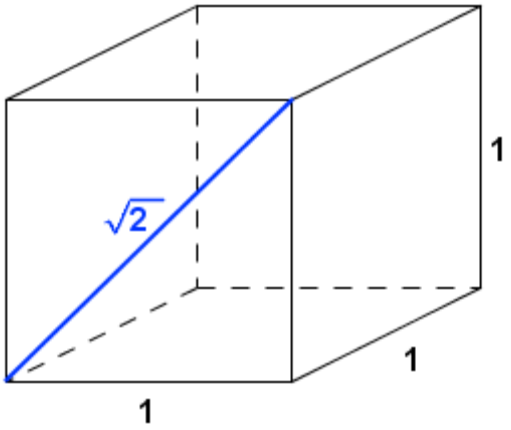


Aplicant aquesta fórmula al nostre quadrat unitari obtenim el següent resultat:

$h^2=c^2+c^2$
$h^2=1^2+1^2$
$h^2=1+1$
$h^2=2$
$h=\sqrt{2}$



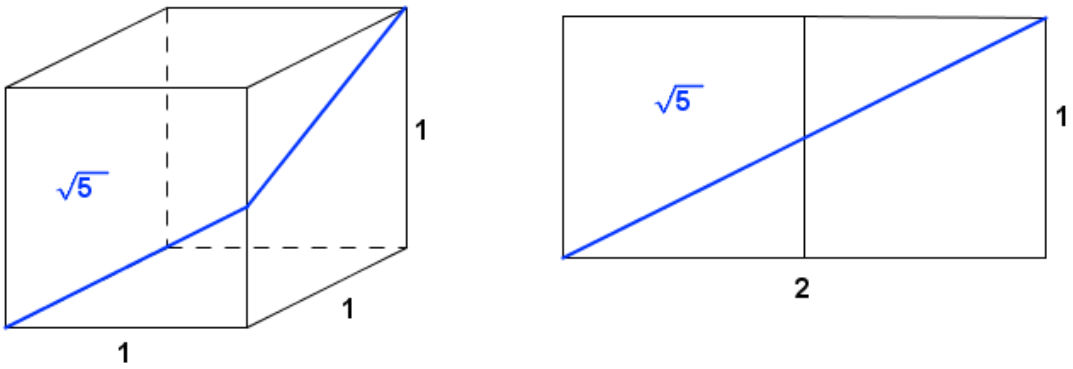
El resultat numèric obtingut a la diagonal d'un quadrat també correspon a la distància mínima entre un vèrtex inferior i un vèrtex superior que no estiguin de costat en una cara del cub:



A continuació, un cop buscada la mínima distància entre dos vèrtex que no estiguin de costat, intentaré buscar altres diagonals que parteixin i acabin en més d'una cara. Cada vegada prenent un nombre major de cares.
Representaré gràficament aquestes diagonals primer en el cub tridimensional i seguidament en el pla.

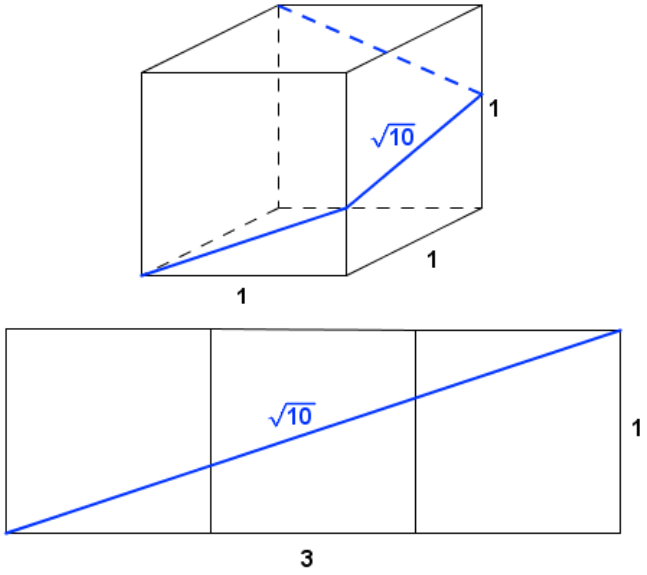
El següent que busco és la diagonal que s'inicia en el vèrtex d'una cara i acaba en el vèrtex oposat de la segona cara:

$h^2=c^2+c^2$
$h^2=2^2+1^2$
$h^2=4+1$
$h^2=5$
$h=\sqrt{5}$



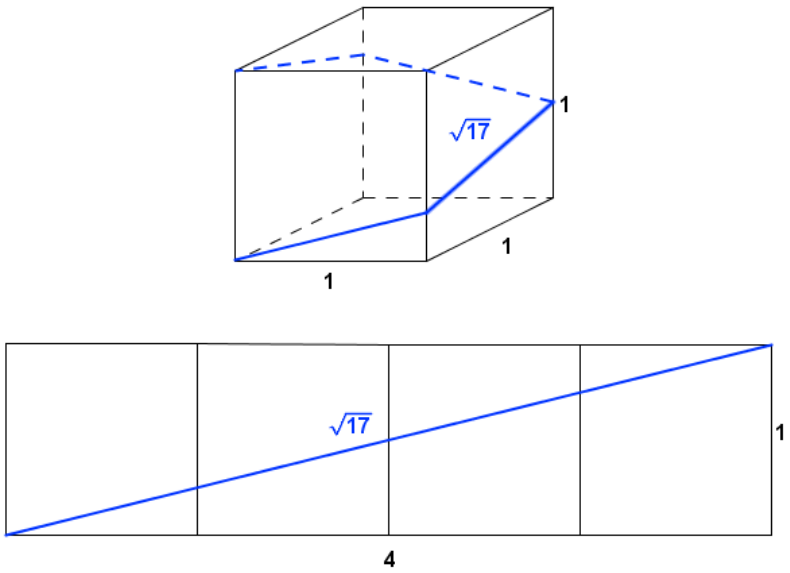
Després de buscar la distància entre dos vèrtexs de dos cares diferents que es troben el més llunys possible, buscaré la diagonal que passa per tres cares, i s'inicia en un vèrtex i acaba en un altre el més lluny possible.

$h^2=c^2+c^2$
$h^2=3^2+1^2$
$h^2=9+1$
$h^2=10$
$h=\sqrt{10}$



Buscada la diagonal que passa per tres cares, buscaré la distància d'una diagonal que passarà per quatre cares del cub i s'inicia a un vèrtex i acaba en un altre el més lluny possible.

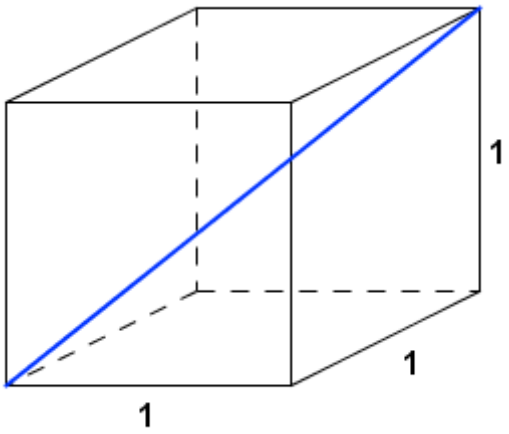
$h^2=c^2+c^2$
$h^2=4^2+1^2$
$h^2=16+1$
$h^2=17$
$h=\sqrt{17}$



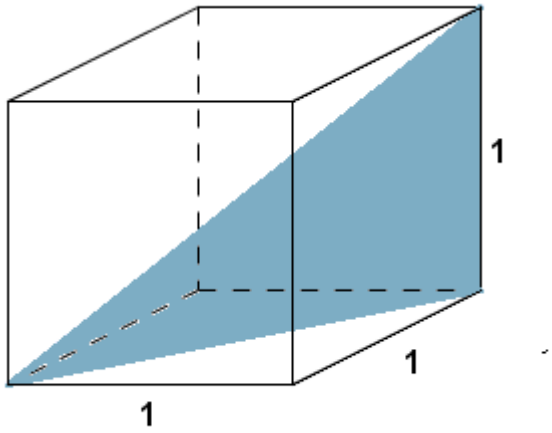
Com a norma general, per tant, puc deduir que la fórmula que he d'utilitzar per a calcular qualsevol d'aquestes distàncies sempre serà: $d=\sqrt{a^2+1}$. Teorema de Pitàgores.
Es fa ús del nombre 1, ja que l'alçada sempre serà d'una unitat, de la mateixa manera que si en comptes de fer la quadricula en forma horitzontal, la féssim vertical, el que mesuraria una unitat seria l'amplada.
L'ús de la *a*, és per anomenar el nombre de quadrets que agafem. Cada quadret mesura una unitat, per tant, serà la suma de les unitats que mesura l'amplada, i si féssim el mateix, passar la quadrícula d'horitzontal a vertical, la *a* representaria l'alçada.

Per tant, a partir de la fórmula citada anteriorment, ara podem calcular qualsevol distància per l'exterior del cub.

També es pot fer un càlcul per l'interior del cub, i seria interessant buscar la distància màxima entre dos vèrtex passant pel centre. Ho podem observar en la recta representada de color blau a continuació.



Per a calcular la mida d'aquest segment, utilitzaré el teorema de Pitàgores, amb un triangle rectangle que passarà per l'interior del cub. Es pot veure representat de la següent manera:



A partir d'aquí puc fer-ne el càlcul. Les mesures seran les següents:

- Catet vertical = 1
- Catet horitzontal = $\sqrt{2}$

Per tant la operació serà:

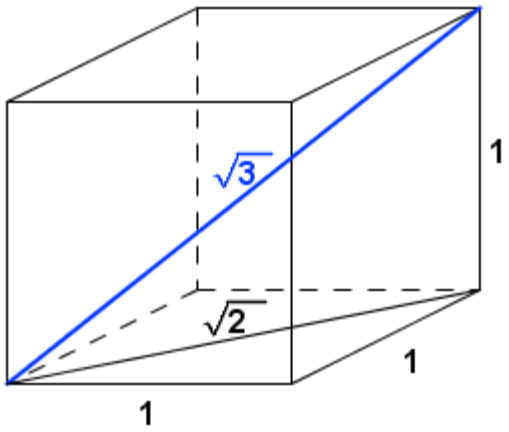
$h^2=c^2+c^2$

$h^2=\left(\sqrt{2}\right)^2+1^2$

$h^2=2+1$

$h^2=3$

$h=\sqrt{3}$



3.3 RESULTATS FINALS

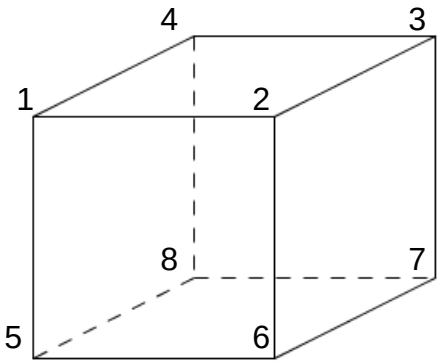
Per tant, un cop fetes les operacions anteriors, puc afirmar que els nombres reals que es compleixen en un cub unitari son:

- 1 Mesura de cada costat del cub
- $\sqrt{2}$ Diagonal exterior d'una cara
- $\sqrt{5}$ Diagonal exterior de dos cares
- $\sqrt{10}$ Diagonal exterior de tres cares
- $\sqrt{17}$ Diagonal exterior de quatre cares
- $\sqrt{3}$ Diagonal interior d'un cub
- Norma general: $\sqrt{a^2+1}$

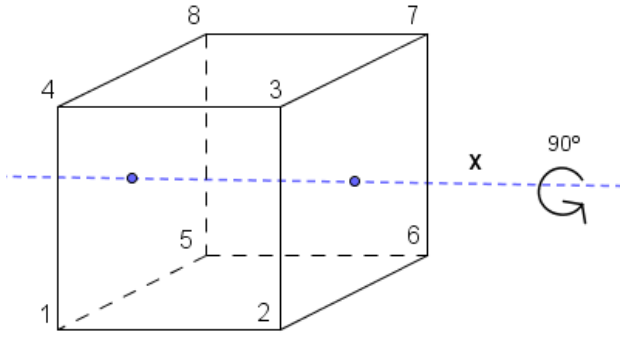
4. MOVIMENTS QUE DEIXEN UN CUB INVARIABLE

4.1 MOVIMENTS GIRATORIS

Si fem girar un cub convencional, respecte un eix que passi pel centre, un determinat nombre de graus, podem obtenir un altre cub amb exactament la mateixa posició que el cub inicial. Aquest eix pot ser horitzontal, vertical o inclinat.
L'eix de simetria pot passar per diferents punts d'un cub: centre de les cares, vèrtexs oposats i centre de les arestes.



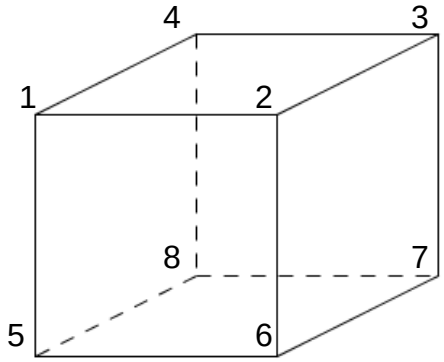
Cal definir una nomenclatura per definir tots aquests moviments. Per fer-ho utilitzarem matrius.
Una matriu és un conjunt de nombres disposats en files i columnes de manera que si té m files (horitzontals) i n columnes (verticals) direm que la matriu és de dimensió m x n.
En el nostre cas, utilitzarem matrius de 2 files i 8 columnes, és a dir de dimensió 2 x 8. En la primera fila hi posarem els 8 vèrtexs del cub disposat tal i com mostra l'esquema i en la segona fila hi posarem el lloc on ha anat a parar cada vèrtex després d'haver fet un moviment.



$$M5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 2 & 1 & 8 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Exemple de fer girar l'eix X 90º (Representació gràfica amb la seva respectiva matriu).

Em refereixo a la Identitat, com al cub que no ha estat sotmès a cap transformació, per tant, a l'original.

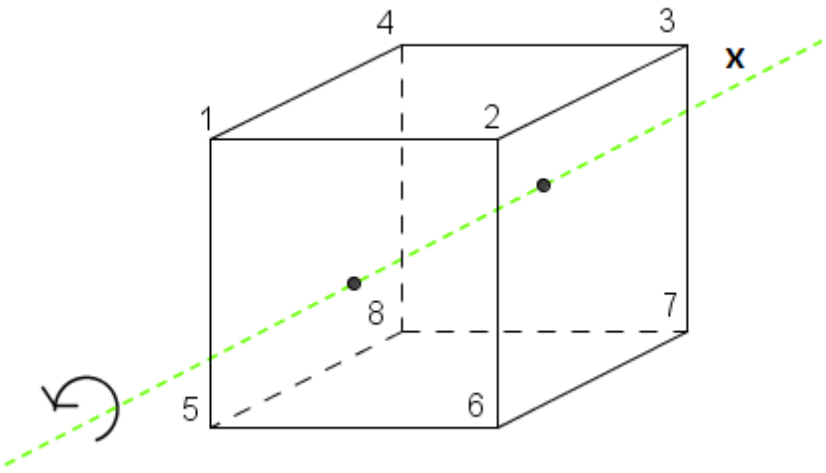


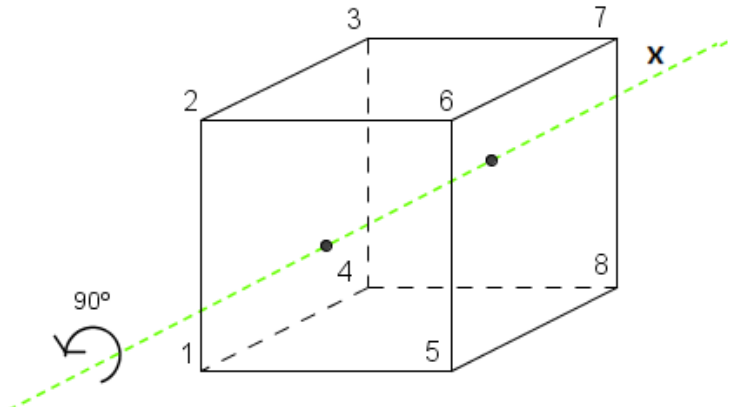
$$I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

A continuació relaciono tots el moviments que deixen invariable al cub:

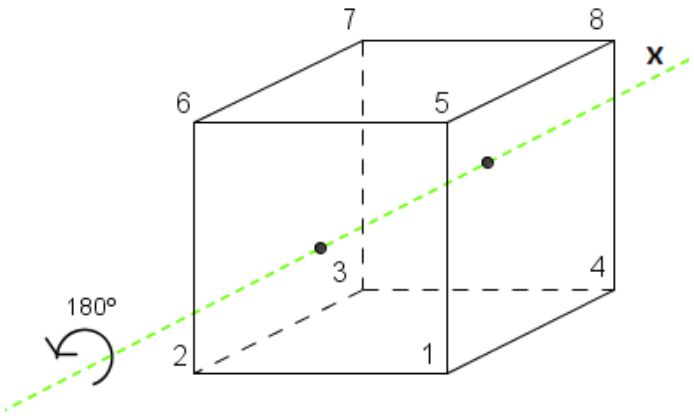
En primer lloc buscaré els diferents graus de gir per tal que aplicant-los al cub utilitzant l'eix X, acabaré obtenint el mateix cub inicial.

Aplicant un moviment en aquest eix, es pot fer girar el cub en tres graus diferents: 90º, 180º i 270º.
Per tant, podem veure representats els tres únics moviments:

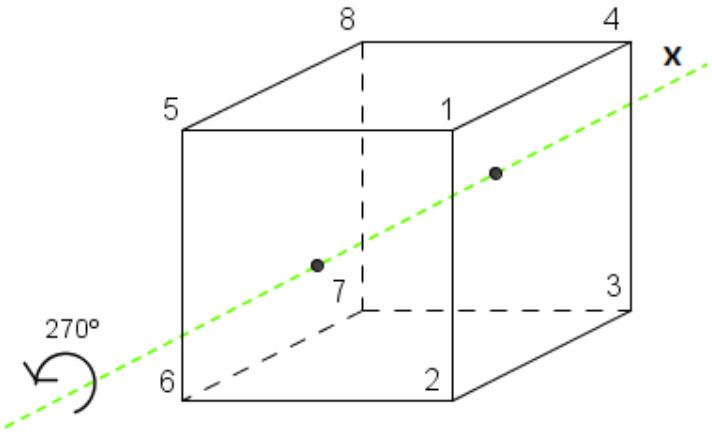




$$M2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 4 & 8 & 6 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

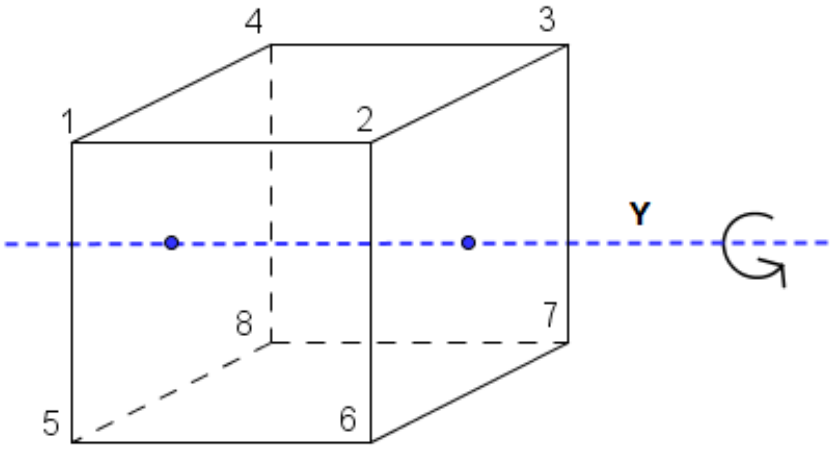


$$M3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

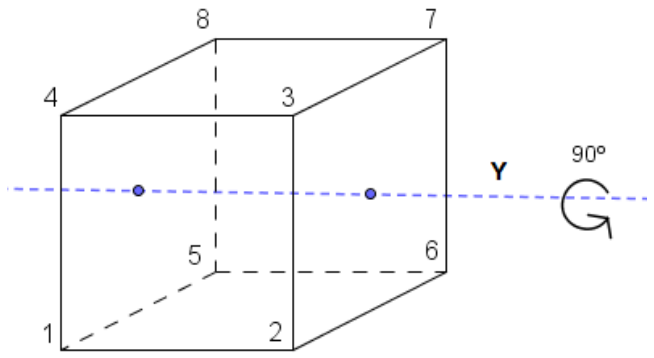
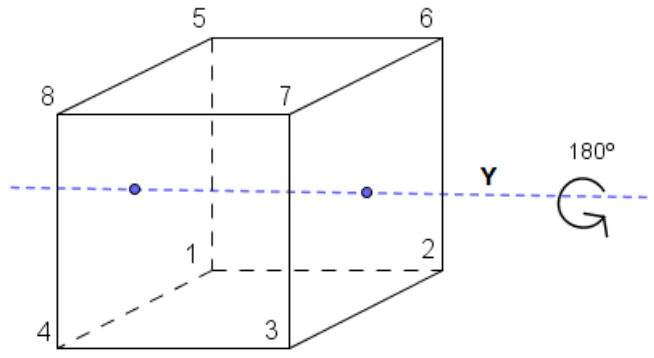
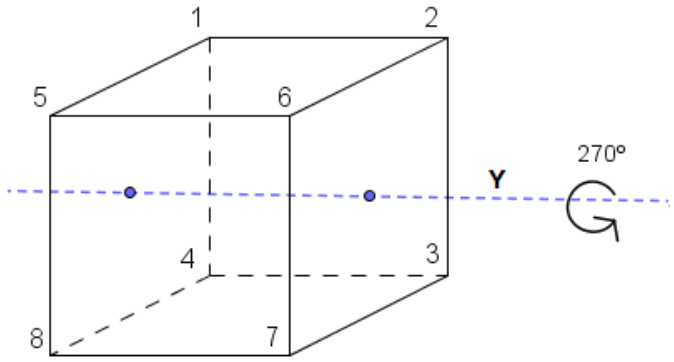


$$M4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 7 & 3 & 1 & 5 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

En segon lloc buscaré els diferents graus de gir per tal que aplicant-los al cub utilitzant l'eix Y, acabaré obtenint el mateix cub inicial.

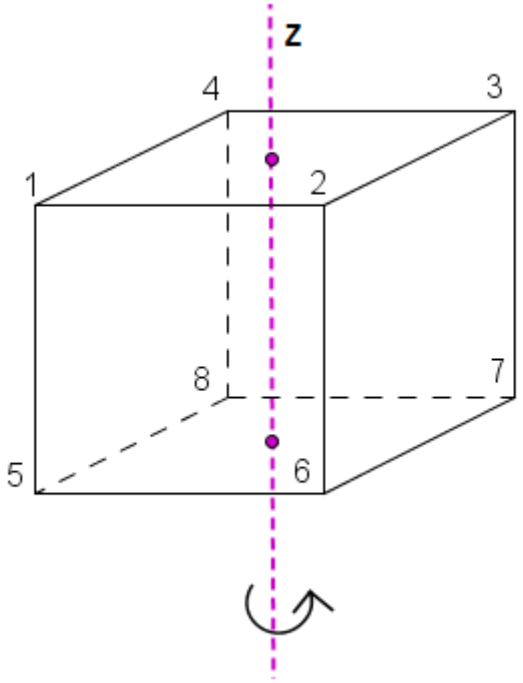


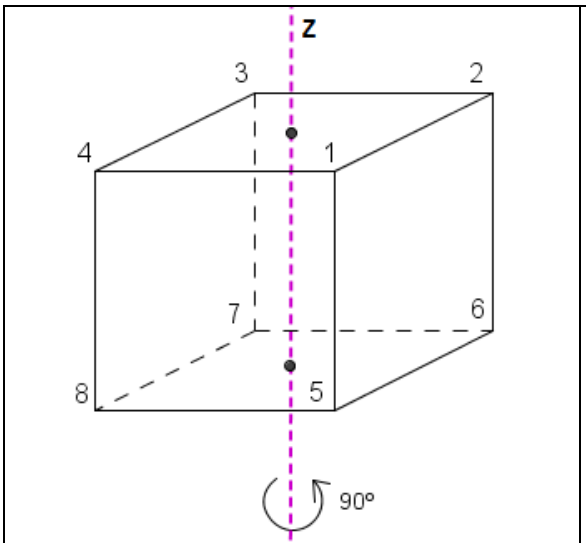
Aplicant un moviment en aquest eix, es pot fer girar el cub en tres graus diferents: 90º, 180º i 270º.
Per tant, podem veure representats els tres únics moviments:

	$M5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 2 & 1 & 8 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
	$M6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
	$M7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 7 & 8 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

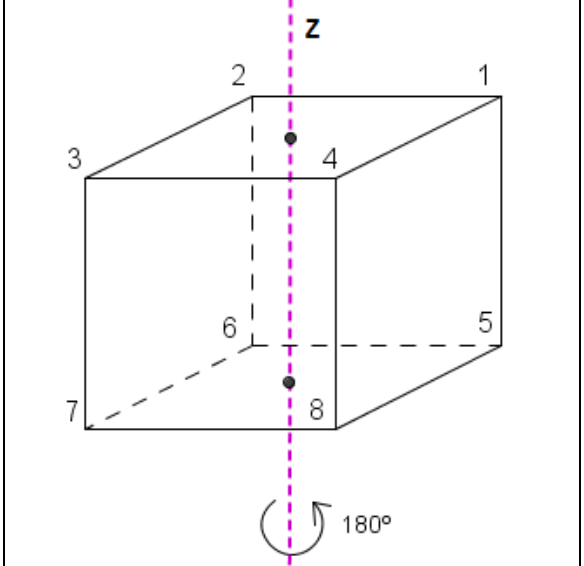
En tercer lloc buscaré els diferents graus de gir per tal que aplicant-los al cub utilitzant l'eix Z, acabaré obtenint el mateix cub inicial.

Aplicant un moviment en aquest eix, es pot fer girar el cub en tres graus diferents: 90º, 180º i 270º.
Per tant, podem veure representats els tres únics moviments:

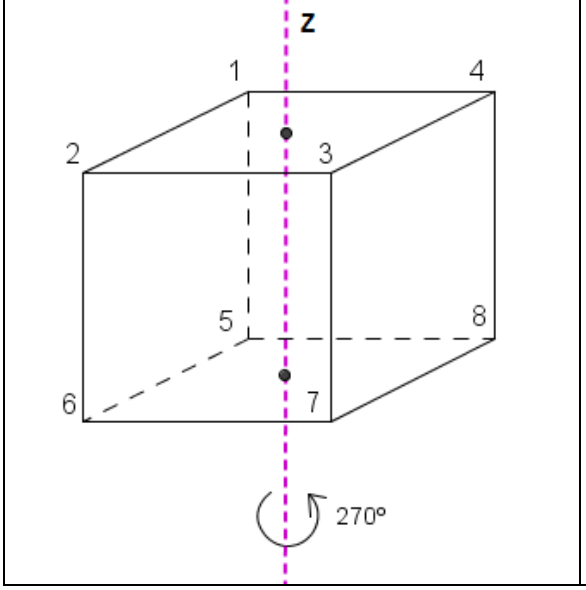




$$M8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$



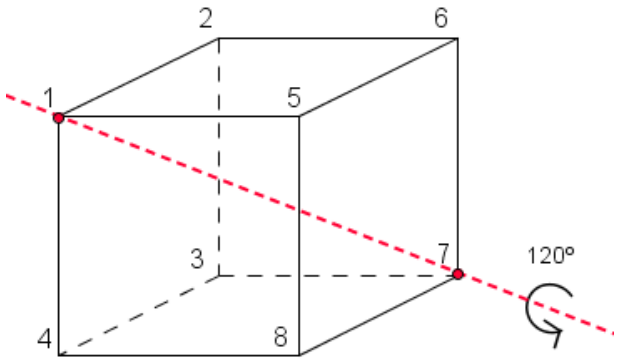
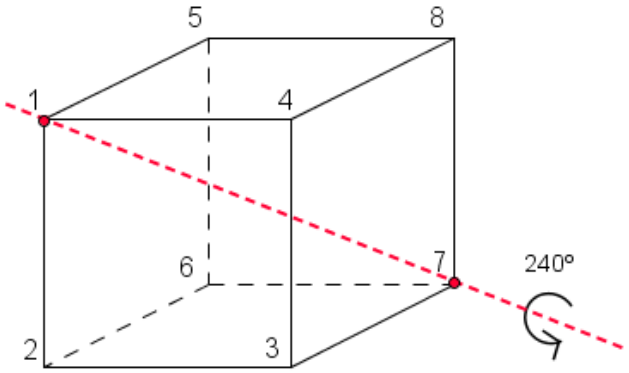
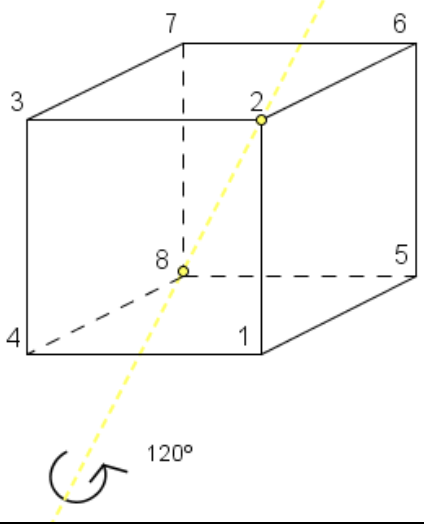
$$M9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

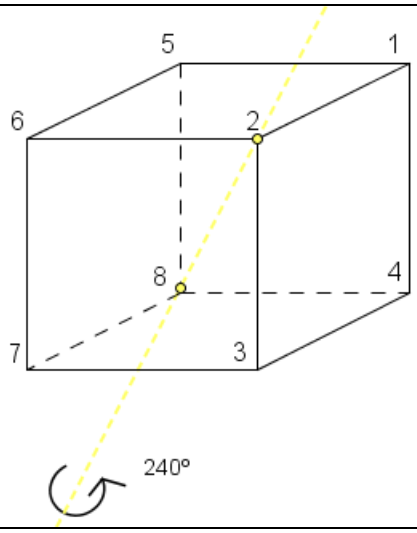
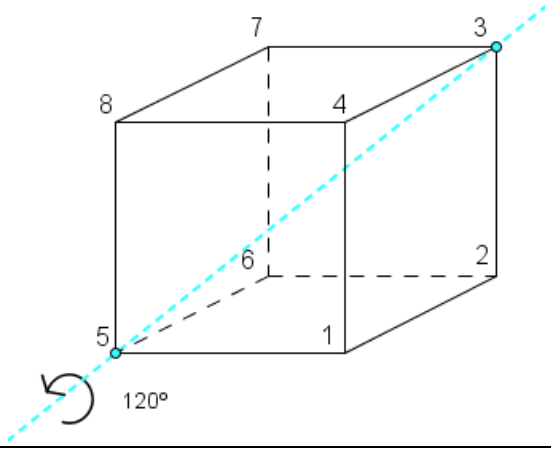
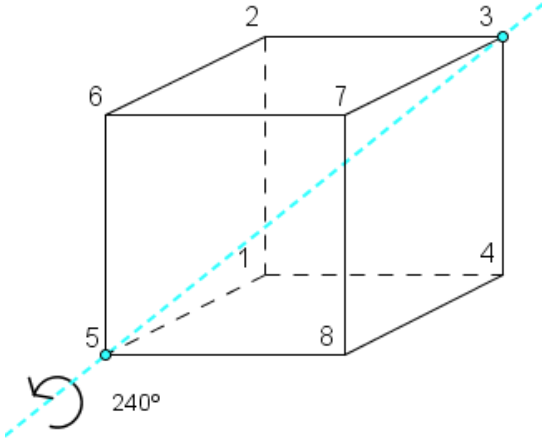


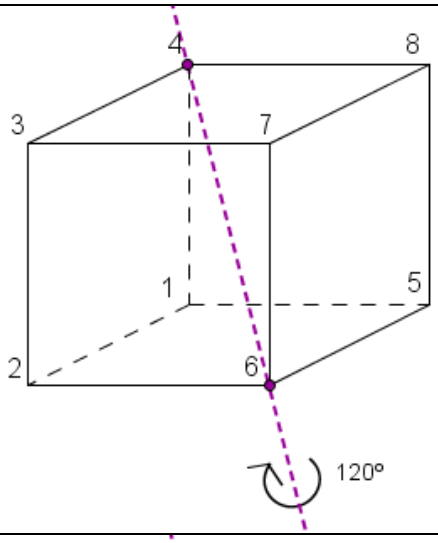
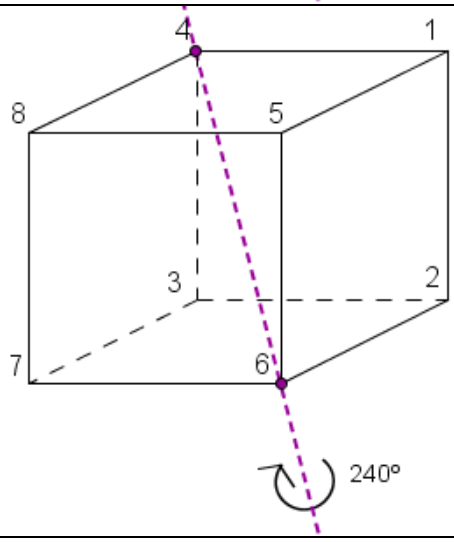
$$M10 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Passant eixos pel centre de les cares, s'han acabat les combinacions.

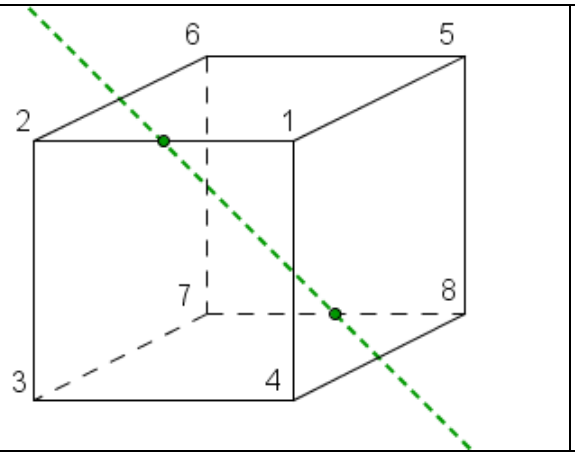
M'adono que cal fer passar els eixos pels vèrtex per obtenir altres resultats i observo que de cada eix n'obtenim dos girs diferents: 120º i 240º. D'aquesta manera aconseguiré el cub invariat.
A continuació exposaré la representació gràfica de cada combinació seguida de la seva corresponent matriu.
I s'obtenen diferents moviments:

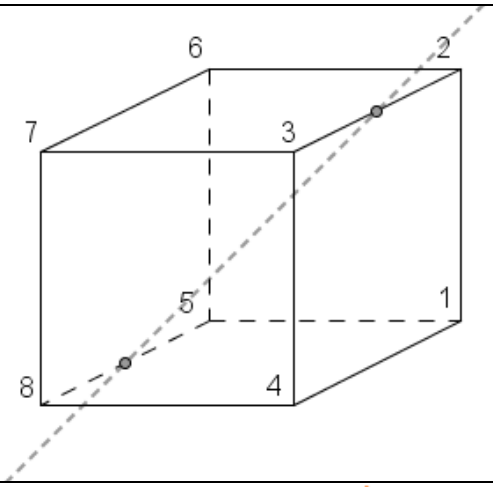
	$M11 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 8 & 5 & 2 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$
	$M12 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 6 & 2 & 4 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$
	$M13 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 1 & 5 & 7 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

	$M14 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$
	$M15 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 3 & 2 & 5 & 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
	$M16 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 3 & 7 & 5 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

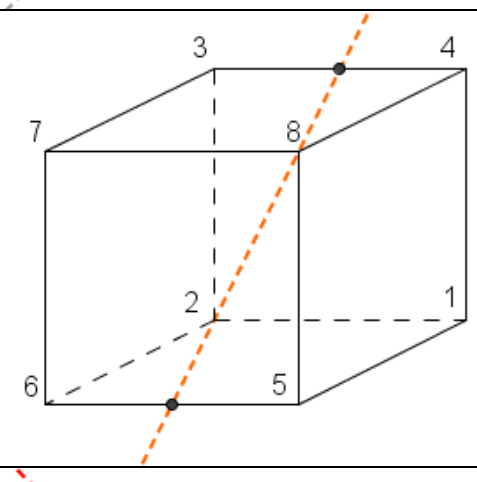
	$M17 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 1 & 4 & 7 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
	$M18 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 8 & 4 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

Finalment, representaré la última possibilitat que em permet aconseguir el cub invariable a partir d'un gir. Consisteix en que l'eix travessi les dues arestes oposades.
A diferència dels eixos anteriors només en puc obtenir una única variació a partir del gir de 180º.

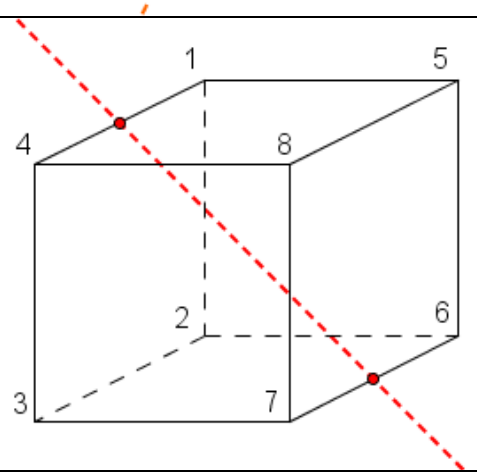
	$M19 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$



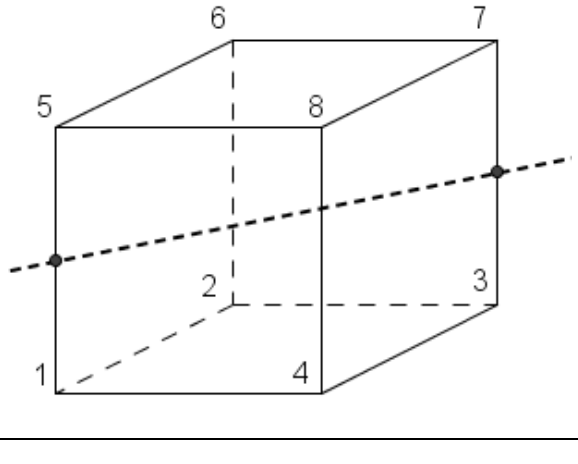
$$M20 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 2 & 6 & 8 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$



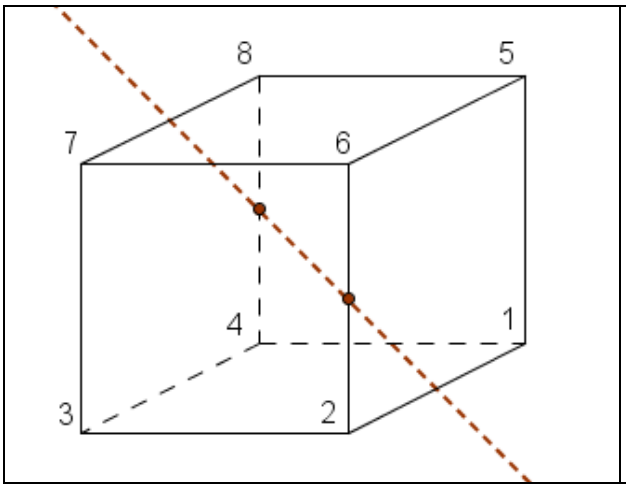
$$M21 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 4 & 3 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



$$M22 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 5 & 1 & 3 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$



$$M23 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 7 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$



$$M24 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 8 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Aquestes són totes les variacions que presenta un cub al moure'l, fent-lo girar prenent diferents eixos rotatoris, i que deixen el cub visiblement invariable.

4.2 COMPOSICIÓ DE MOVIMENTS GIRATORIS

Partint dels resultats anteriors, on aplicava un únic moviment, he obtingut 24 variacions, tenint en compte que la Identitat (I) està inclosa dins el conjunt.
Arribat en aquest punt, em plantejo quin seria el resultat si aplico dos dels anteriors moviments consecutivament en el cub.
Per comprovar-ho, cal que faci les operacions de matrius.
La lectura de les matrius serà la següent:

$$X * Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ a & b & c & d & e & f & g & h \end{pmatrix} = Z$$

X = primer moviment
Y = segon moviment
1, 2...7, 8 = posició inicial de cada vèrtex
a, b...g, h = posició final de cada vèrtex
Z = moviment resultant

$I * I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = I$	$I * 13 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 1 & 5 & 7 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} = 13$
$I * 2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 4 & 8 & 6 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} = 2$	$I * 14 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix} = 14$
$I * 3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 3$	$I * 15 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 3 & 2 & 5 & 8 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 15$
$I * 4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 7 & 3 & 1 & 5 & 8 & 4 \end{pmatrix} = 4$	$I * 16 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 3 & 7 & 5 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = 16$
$I * 5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 2 & 1 & 8 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 5$	$I * 17 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 1 & 4 & 7 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 17$
$I * 6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 6$	$I * 18 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 8 & 4 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 18$
$I * 7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 7 & 8 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} = 7$	$I * 19 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix} = 19$
$I * 8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} = 8$	$I * 20 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 2 & 6 & 8 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 20$
$I * 9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 9$	$I * 21 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 4 & 3 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 21$
$I * 10 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = 10$	$I * 22 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 5 & 1 & 3 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix} = 22$
$I * 11 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 8 & 5 & 2 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} = 11$	$I * 23 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 7 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 23$
$I * 12 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 6 & 2 & 4 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix} = 12$	$I * 24 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 8 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 24$

$2 * I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 4 & 8 & 6 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} = 2$	$2 * 13 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 8 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 24$
$2 * 2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 3$	$2 * 14 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 7 & 8 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} = 7$
$2 * 3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 7 & 3 & 1 & 5 & 8 & 4 \end{pmatrix} = 4$	$2 * 15 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 2 & 1 & 8 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 5$
$2 * 4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = I$	$2 * 16 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 7 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 23$
$2 * 5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 1 & 4 & 7 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 17$	$2 * 17 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 4 & 3 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 21$
$2 * 6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 5 & 1 & 3 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix} = 22$	$2 * 18 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} = 8$
$2 * 7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 8 & 5 & 2 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} = 11$	$2 * 19 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix} = 13$
$2 * 8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 1 & 5 & 7 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} = 13$	$2 * 20 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 6$
$2 * 9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 2 & 6 & 8 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 20$	$2 * 21 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 3 & 2 & 5 & 8 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 15$
$2 * 10 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 3 & 7 & 5 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = 16$	$2 * 22 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 9$
$2 * 11 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix} = 19$	$2 * 23 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 6 & 2 & 4 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix} = 12$
$2 * 12 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = 10$	$2 * 24 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 8 & 4 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 18$

$3 * I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 3$	$3 * 13 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 8 & 4 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 18$
$3 * 2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 7 & 3 & 1 & 5 & 8 & 4 \end{pmatrix} = 4$	$3 * 14 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 8 & 5 & 2 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} = 11$
$3 * 3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = I$	$3 * 15 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 1 & 4 & 7 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 17$
$3 * 4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 4 & 8 & 6 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} = 2$	$3 * 16 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 6 & 2 & 4 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix} = 12$
$3 * 5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 4 & 3 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 21$	$3 * 17 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 3 & 2 & 5 & 8 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 15$
$3 * 6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 9$	$3 * 18 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 1 & 5 & 7 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} = 13$
$3 * 7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix} = 19$	$3 * 19 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 7 & 8 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} = 7$
$3 * 8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 8 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 24$	$3 * 20 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 5 & 1 & 3 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix} = 22$
$3 * 9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 6$	$3 * 21 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 2 & 1 & 8 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 5$
$3 * 10 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 7 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 23$	$3 * 22 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 2 & 6 & 8 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 20$
$3 * 11 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix} = 14$	$3 * 23 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = 10$

$3 * 12 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 3 & 7 & 5 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = 16$	$3 * 24 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} = 8$
$4 * I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 7 & 3 & 1 & 5 & 8 & 4 \end{pmatrix} = 4$	$4 * 13 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} = 8$
$4 * 2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = I$	$4 * 14 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix} = 19$
$4 * 3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 4 & 8 & 6 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} = 2$	$4 * 15 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 4 & 3 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 21$
$4 * 4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 3$	$4 * 16 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = 10$
$4 * 5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 3 & 2 & 5 & 8 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 15$	$4 * 17 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 2 & 1 & 8 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 5$
$4 * 6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 2 & 6 & 8 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 20$	$4 * 18 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 8 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 24$
$4 * 7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix} = 14$	$4 * 19 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 8 & 5 & 2 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} = 11$
$4 * 8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 8 & 4 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 18$	$4 * 20 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 9$
$4 * 9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 5 & 1 & 3 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix} = 22$	$4 * 21 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 1 & 4 & 7 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 17$
$4 * 10 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 6 & 2 & 4 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix} = 12$	$4 * 22 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 6$
$4 * 11 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 7 & 8 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} = 7$	$4 * 23 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 3 & 7 & 5 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = 16$
$4 * 12 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 7 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 23$	$4 * 24 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 1 & 5 & 7 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} = 13$

$5 * I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 2 & 1 & 8 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 5$	$5 * 13 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 2 & 6 & 8 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 20$
$5 * 2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 1 & 5 & 7 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} = 13$	$5 * 14 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = 10$
$5 * 3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix} = 19$	$5 * 15 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 7 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 23$
$5 * 4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 6 & 2 & 4 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix} = 12$	$5 * 16 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 4 & 8 & 6 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} = 2$
$5 * 5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 6$	$5 * 17 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 8 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 24$
$5 * 6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 7 & 8 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} = 7$	$5 * 18 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 7 & 3 & 1 & 5 & 8 & 4 \end{pmatrix} = 4$
$5 * 7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = I$	$5 * 19 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 9$
$5 * 8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 3 & 2 & 5 & 8 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 15$	$5 * 20 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 3 & 7 & 5 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = 16$
$5 * 9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 4 & 3 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 21$	$5 * 21 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 3$
$5 * 10 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 1 & 4 & 7 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 17$	$5 * 22 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 8 & 4 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 18$
$5 * 11 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} = 8$	$5 * 23 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 8 & 5 & 2 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} = 11$

$5 * 12 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 5 & 1 & 3 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix} = 22$	$5 * 24 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix} = 14$
$6 * I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 6$	$6 * 13 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 3 & 7 & 5 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = 16$
$6 * 2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 2 & 6 & 8 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 20$	$6 * 14 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 1 & 4 & 7 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 17$
$6 * 3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 9$	$6 * 15 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 8 & 5 & 2 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} = 11$
$6 * 4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 5 & 1 & 3 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix} = 22$	$6 * 16 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 1 & 5 & 7 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} = 13$
$6 * 5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 7 & 8 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} = 7$	$6 * 17 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix} = 14$
$6 * 6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = I$	$6 * 18 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 6 & 2 & 4 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix} = 12$
$6 * 7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 2 & 1 & 8 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 5$	$6 * 19 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 4 & 3 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 21$
$6 * 8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 7 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 23$	$6 * 20 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 4 & 8 & 6 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} = 2$
$6 * 9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 3$	$6 * 21 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix} = 19$
$6 * 10 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 8 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 24$	$6 * 22 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 7 & 3 & 1 & 5 & 8 & 4 \end{pmatrix} = 4$
$6 * 11 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 3 & 2 & 5 & 8 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 15$	$6 * 23 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} = 8$
$6 * 12 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 8 & 4 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 18$	$6 * 24 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = 10$

$7 * I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 7 & 8 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} = 7$	$7 * 13 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 4 & 8 & 6 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} = 2$
$7 * 2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 3 & 7 & 5 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = 16$	$7 * 14 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 8 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 24$
$7 * 3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 4 & 3 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 21$	$7 * 15 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} = 8$
$7 * 4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 8 & 4 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 18$	$7 * 16 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 2 & 6 & 8 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} =$
$7 * 5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = I$	$7 * 17 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = 20$
$7 * 6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 2 & 1 & 8 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 5$	$7 * 18 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 5 & 1 & 3 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix} = 10$
$7 * 7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 6$	$7 * 19 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 3$
$7 * 8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 8 & 5 & 2 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} = 11$	$7 * 20 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 1 & 5 & 7 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} = 13$
$7 * 9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix} = 19$	$7 * 21 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 9$
$7 * 10 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix} = 14$	$7 * 22 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 6 & 2 & 4 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix} = 12$
$7 * 11 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 7 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 23$	$7 * 23 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 3 & 2 & 5 & 8 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 15$

$7 * 12 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 7 & 3 & 1 & 5 & 8 & 4 \end{pmatrix} = 4$	$7 * 24 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 1 & 4 & 7 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 17$
$8 * I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} = 8$	$8 * 13 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix} = 19$
$8 * 2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 8 & 5 & 2 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} = 11$	$8 * 14 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 7 & 3 & 1 & 5 & 8 & 4 \end{pmatrix} = 4$
$8 * 3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 7 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 23$	$8 * 15 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 2 & 6 & 8 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 20$
$8 * 4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 3 & 2 & 5 & 8 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 15$	$8 * 16 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 7 & 8 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} = 7$
$8 * 5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 1 & 5 & 7 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} = 13$	$8 * 17 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 4 & 8 & 6 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} = 2$
$8 * 6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 8 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 24$	$8 * 18 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 4 & 3 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 21$
$8 * 7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 8 & 4 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 18$	$8 * 19 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 6 & 2 & 4 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix} = 12$
$8 * 8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 9$	$8 * 20 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix} = 14$
$8 * 9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = 10$	$8 * 21 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 3 & 7 & 5 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = 16$
$8 * 10 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = I$	$8 * 22 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 1 & 4 & 7 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 17$
$8 * 11 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 5 & 1 & 3 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix} = 22$	$8 * 23 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 6$
$8 * 12 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 2 & 1 & 8 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix} 5 =$	$8 * 24 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 3$

$9 * I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 9$	$9 * 13 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 6 & 2 & 4 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix} = 12$
$9 * 2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 5 & 1 & 3 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix} = 22$	$9 * 14 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 3 & 2 & 5 & 8 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 15$
$9 * 3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 6$	$9 * 15 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix} = 14$
$9 * 4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 2 & 6 & 8 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 20$	$9 * 16 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 8 & 4 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 18$
$9 * 5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix} = 19$	$9 * 17 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 8 & 5 & 2 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} = 11$
$9 * 6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 3$	$9 * 18 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 3 & 7 & 5 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = 16$
$9 * 7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 4 & 3 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 21$	$9 * 19 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 2 & 1 & 8 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 5$
$9 * 8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = 10$	$9 * 20 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 7 & 3 & 1 & 5 & 8 & 4 \end{pmatrix} = 4$
$9 * 9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = I$	$9 * 21 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 7 & 8 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} = 7$
$9 * 10 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} = 8$	$9 * 22 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 4 & 8 & 6 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} = 2$
$9 * 11 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 1 & 4 & 7 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 17$	$9 * 23 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 8 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 24$

$9 * 12 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 1 & 5 & 7 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} = 13$	$9 * 24 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 7 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 23$
$10 * I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = 10$	$10 * 13 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 2 & 1 & 8 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 5$
$10 * 2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 1 & 4 & 7 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 17$	$10 * 14 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 2 & 6 & 8 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 20$
$10 * 3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 8 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 24$	$10 * 15 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 7 & 3 & 1 & 5 & 8 & 4 \end{pmatrix} = 4$
$10 * 4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix} = 14$	$10 * 16 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 4 & 3 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 21$
$10 * 5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 6 & 2 & 4 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix} = 12$	$10 * 17 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 5 & 1 & 3 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix} = 22$
$10 * 6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 7 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 23$	$10 * 18 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 7 & 8 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} = 7$
$10 * 7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 3 & 7 & 5 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = 16$	$10 * 19 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 1 & 5 & 7 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} = 13$
$10 * 8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = I$	$10 * 20 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 3 & 2 & 5 & 8 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 15$
$10 * 9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} = 8$	$10 * 21 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 8 & 4 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 18$
$10 * 10 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 9$	$10 * 22 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 8 & 5 & 2 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} = 11$
$10 * 11 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 4 & 8 & 6 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} = 2$	$10 * 23 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 3$
$10 * 12 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix} = 19$	$10 * 24 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 6$

$11 * I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 8 & 5 & 2 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} = 11$	$11 * 13 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 3$
$11 * 2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 7 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 23$	$11 * 14 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 8 & 4 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 18$
$11 * 3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 3 & 2 & 5 & 8 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 15$	$11 * 15 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 1 & 5 & 7 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} = 13$
$11 * 4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} = 8$	$11 * 16 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 6$
$11 * 5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 4 & 8 & 6 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} = 2$	$11 * 17 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 3 & 7 & 5 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = 16$
$11 * 6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 1 & 4 & 7 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 17$	$11 * 18 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 9$
$11 * 7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 5 & 1 & 3 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix} = 22$	$11 * 19 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 7 & 3 & 1 & 5 & 8 & 4 \end{pmatrix} = 4$
$11 * 8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix} = 19$	$11 * 20 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 8 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 24$
$11 * 9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix} = 14$	$11 * 21 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 2 & 6 & 8 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 20$
$11 * 10 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 7 & 8 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} = 7$	$11 * 22 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = 10$
$11 * 11 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 6 & 2 & 4 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix} = 12$	$11 * 23 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 2 & 1 & 8 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 5$

$11 * 12 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = I$	$11 * 24 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 4 & 3 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 21$
$12 * I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 6 & 2 & 4 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix} = 12$	$12 * 13 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 3 & 2 & 5 & 8 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 15$
$12 * 2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 2 & 1 & 8 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 5$	$12 * 14 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 9$
$12 * 3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 1 & 5 & 7 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} = 13$	$12 * 15 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 3$
$12 * 4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix} = 19$	$12 * 16 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 1 & 4 & 7 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 17$
$12 * 5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 7 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 23$	$12 * 17 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 6$
$12 * 6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 3 & 7 & 5 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = 16$	$12 * 18 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix} = 14$
$12 * 7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = 10$	$12 * 19 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} = 8$
$12 * 8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 7 & 3 & 1 & 5 & 8 & 4 \end{pmatrix} = 4$	$12 * 20 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 4 & 3 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 21$
$12 * 9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 8 & 4 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 18$	$12 * 21 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 8 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 24$
$12 * 10 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 5 & 1 & 3 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix} = 22$	$12 * 22 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 8 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 7$
$12 * 11 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = I$	$12 * 23 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 4 & 8 & 6 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} = 2$
$12 * 12 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 8 & 5 & 2 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} = 11$	$12 * 24 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 2 & 6 & 8 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 20$

$13 * I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 1 & 5 & 7 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} = 13$	$13 * 13 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix} = 14$
$13 * 2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix} = 19$	$13 * 14 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = I$
$13 * 3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 6 & 2 & 4 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix} = 12$	$13 * 15 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 6$
$13 * 4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 2 & 1 & 8 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 5$	$13 * 16 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 8 & 5 & 2 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} = 11$
$13 * 5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 8 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 24$	$13 * 17 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 3$
$13 * 6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 8 & 4 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 18$	$13 * 18 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 3 & 2 & 5 & 8 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 15$
$13 * 7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} = 8$	$13 * 19 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = 10$
$13 * 8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 2 & 6 & 8 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 20$	$13 * 20 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 7 & 8 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} = 7$
$13 * 9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 3 & 7 & 5 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = 16$	$13 * 21 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 7 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 23$
$13 * 10 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 4 & 8 & 6 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} = 2$	$13 * 22 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 4 & 3 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 21$
$13 * 11 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 9$	$13 * 23 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 5 & 1 & 3 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix} = 22$

$13 * 12 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&5&1&4&7&6&2&3\end{pmatrix} = 17$	$13 * 24 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&6&7&3&1&5&8&4\end{pmatrix} = 4$
$14 * I = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&2&6&7&4&1&5&8\end{pmatrix} = 14$	$14 * 13 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&2&3&4&5&6&7&8\end{pmatrix} = I$
$14 * 2 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\4&1&2&3&8&5&6&7\end{pmatrix} = 10$	$14 * 14 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&2&1&5&7&3&4&8\end{pmatrix} = 13$
$14 * 3 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&5&1&4&7&6&2&3\end{pmatrix} = 17$	$14 * 15 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&7&8&4&2&6&5&1\end{pmatrix} = 18$
$14 * 4 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&6&5&8&3&2&1&4\end{pmatrix} = 24$	$14 * 16 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&4&1&2&7&8&5&6\end{pmatrix} = 9$
$14 * 5 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&6&7&3&1&5&8&4\end{pmatrix} = 4$	$14 * 17 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&5&6&2&4&8&7&3\end{pmatrix} = 12$
$14 * 6 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&7&3&2&5&8&4&1\end{pmatrix} = 15$	$14 * 18 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&7&6&5&4&3&2&1\end{pmatrix} = 6$
$14 * 7 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&3&2&6&8&4&1&5\end{pmatrix} = 20$	$14 * 19 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&1&4&8&6&2&3&7\end{pmatrix} = 2$
$14 * 8 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\4&3&7&8&1&2&6&5\end{pmatrix} = 7$	$14 * 20 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&3&4&1&6&7&8&5\end{pmatrix} = 8$
$14 * 9 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&4&8&5&2&3&7&6\end{pmatrix} = 11$	$14 * 21 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\4&8&5&1&3&7&6&2\end{pmatrix} = 22$
$14 * 10 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&1&5&6&3&4&8&7\end{pmatrix} = 19$	$14 * 22 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&8&7&6&1&4&3&2\end{pmatrix} = 23$
$14 * 11 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&4&3&7&5&1&2&6\end{pmatrix} = 16$	$14 * 23 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&8&4&3&6&5&1&2\end{pmatrix} = 21$
$14 * 12 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&5&8&7&2&1&4&3\end{pmatrix} = 3$	$14 * 24 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&6&2&1&8&7&3&4\end{pmatrix} = 5$

$15 * I = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&7&3&2&5&8&4&1\end{pmatrix} = 15$	$15 * 13 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&4&1&2&7&8&5&6\end{pmatrix} = 9$
$15 * 2 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&3&4&1&6&7&8&5\end{pmatrix} = 8$	$15 * 14 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&5&6&2&4&8&7&3\end{pmatrix} = 12$
$15 * 3 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&4&8&5&2&3&7&6\end{pmatrix} = 11$	$15 * 15 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&4&3&7&5&1&2&6\end{pmatrix} = 16$
$15 * 4 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&8&7&6&1&4&3&2\end{pmatrix} = 23$	$15 * 16 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&2&3&4&5&6&7&8\end{pmatrix} = I$
$15 * 5 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&3&2&6&8&4&1&5\end{pmatrix} = 20$	$15 * 17 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&2&1&5&7&3&4&8\end{pmatrix} = 13$
$15 * 6 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&2&6&7&4&1&5&8\end{pmatrix} = 14$	$15 * 18 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&5&8&7&2&1&4&3\end{pmatrix} = 3$
$15 * 7 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&6&7&3&1&5&8&4\end{pmatrix} = 4$	$15 * 19 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\4&8&5&1&3&7&6&2\end{pmatrix} = 22$
$15 * 8 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&8&4&3&6&5&1&2\end{pmatrix} = 21$	$15 * 20 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\4&1&2&3&8&6&5&7\end{pmatrix} = 10$
$15 * 9 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&5&1&4&7&6&2&3\end{pmatrix} = 17$	$15 * 21 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&1&4&8&6&2&3&7\end{pmatrix} = 2$
$15 * 10 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&6&2&1&8&7&3&4\end{pmatrix} = 5$	$15 * 22 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&6&5&8&3&2&1&4\end{pmatrix} = 24$
$15 * 11 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&7&8&4&2&6&5&1\end{pmatrix} = 18$	$15 * 23 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\4&3&7&8&1&2&6&5\end{pmatrix} = 7$

$15 * 12 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 6$	$15 * 24 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix} = 19$
$16 * I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 3 & 7 & 5 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = 16$	$16 * 13 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 1 & 4 & 7 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 17$
$16 * 2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 4 & 3 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 21$	$16 * 14 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 6$
$16 * 3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 8 & 4 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 18$	$16 * 15 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = I$
$16 * 4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 7 & 8 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} = 7$	$16 * 16 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 3 & 2 & 5 & 8 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 15$
$16 * 5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix} = 10$	$16 * 17 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 9$
$16 * 6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 6 & 5 & 2 & 4 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix} = 12$	$16 * 18 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 8 & 5 & 2 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix} = 11$
$16 * 7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 7 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 23$	$16 * 19 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 8 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 24$
$16 * 8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 4 & 8 & 6 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} = 2$	$16 * 20 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 2 & 1 & 8 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 5$
$16 * 9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 1 & 5 & 7 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} = 13$	$16 * 21 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 5 & 8 \end{pmatrix} = 8$
$16 * 10 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 2 & 6 & 8 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 20$	$16 * 22 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix} = 19$
$16 * 11 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 3$	$16 * 23 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 7 & 3 & 1 & 5 & 8 & 4 \end{pmatrix} = 4$
$16 * 12 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix} = 14$	$16 * 24 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 5 & 1 & 3 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix} = 22$

$17 * I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 1 & 4 & 7 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 17$	$17 * 13 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 6$
$17 * 2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 8 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 24$	$17 * 14 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 3 & 7 & 5 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = 16$
$17 * 3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix} = 14$	$17 * 15 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 6 & 2 & 4 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix} = 12$
$17 * 4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = 10$	$17 * 16 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 3$
$17 * 5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 5 & 1 & 3 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix} = 22$	$17 * 17 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 8 & 4 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 18$
$17 * 6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 8 & 5 & 2 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} = 11$	$17 * 18 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = I$
$17 * 7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 4 & 8 & 6 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} = 2$	$17 * 19 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 2 & 6 & 8 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 20$
$17 * 8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 2 & 1 & 8 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 5$	$17 * 20 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 7 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 23$
$17 * 9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 3 & 2 & 5 & 8 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 15$	$17 * 21 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 7 & 3 & 1 & 5 & 8 & 4 \end{pmatrix} = 4$
$17 * 10 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 4 & 3 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 21$	$17 * 22 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} = 8$
$17 * 11 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 1 & 5 & 7 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} = 13$	$17 * 23 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix} = 19$

$17 * 12 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 9$	$17 * 24 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 7 & 8 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} = 7$
$18 * I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 8 & 4 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 18$	$18 * 13 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 8 & 5 & 2 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} = 11$
$18 * 2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 7 & 8 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} = 7$	$18 * 14 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 3$
$18 * 3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 3 & 7 & 5 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = 16$	$18 * 15 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 9$
$18 * 4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 4 & 3 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 21$	$18 * 16 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix} = 14$
$18 * 5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} = 8$	$18 * 17 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = I$
$18 * 6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 1 & 5 & 7 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} = 13$	$18 * 18 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 1 & 4 & 7 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 17$
$18 * 7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 8 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 24$	$18 * 19 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 7 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 23$
$18 * 8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 5 & 1 & 2 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix} = 22$	$18 * 20 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix} = 19$
$18 * 9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 6 & 2 & 4 & 5 & 8 & 3 \end{pmatrix} = 12$	$18 * 21 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = 10$
$18 * 10 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 7 & 3 & 1 & 5 & 8 & 4 \end{pmatrix} = 4$	$18 * 22 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 2 & 1 & 8 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 5$
$18 * 11 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 6$	$18 * 23 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 2 & 6 & 8 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 20$
$18 * 12 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 3 & 2 & 5 & 8 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 15$	$18 * 24 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 4 & 8 & 6 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} = 2$

$19 * I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix} = 19$	$19 * 13 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 7 & 3 & 1 & 5 & 8 & 4 \end{pmatrix} = 4$
$19 * 2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 6 & 2 & 4 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix} = 12$	$19 * 14 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} = 8$
$19 * 3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 2 & 1 & 8 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 5$	$19 * 15 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 8 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 24$
$19 * 4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 1 & 5 & 7 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} = 13$	$19 * 16 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 5 & 1 & 3 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix} = 22$
$19 * 5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 3$	$19 * 17 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 7 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 23$
$19 * 6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 4 & 3 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 21$	$19 * 18 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 2 & 6 & 8 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 20$
$19 * 7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 9$	$19 * 19 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = I$
$19 * 8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix} = 14$	$19 * 20 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 8 & 4 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 18$
$19 * 9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 7 & 8 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} = 7$	$19 * 21 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 6$
$19 * 10 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 8 & 5 & 2 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} = 11$	$19 * 22 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 3 & 7 & 5 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = 16$
$19 * 11 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = 10$	$19 * 23 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 1 & 4 & 7 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 17$

$19 * 12 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 4 & 8 & 6 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} = 2$	$19 * 24 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 3 & 2 & 5 & 8 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 15$
$20 * I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 2 & 6 & 8 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 20$	$20 * 13 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = 10$
$20 * 2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 9$	$20 * 14 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 2 & 1 & 8 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 5$
$20 * 3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 5 & 1 & 3 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix} = 22$	$20 * 15 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 7 & 8 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} = 7$
$20 * 4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 6$	$20 * 16 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} = 8$
$20 * 5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix} = 14$	$20 * 17 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix} = 19$
$20 * 6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 7 & 3 & 1 & 5 & 8 & 4 \end{pmatrix} = 4$	$20 * 18 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 7 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 23$
$20 * 7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 3 & 2 & 5 & 8 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 15$	$20 * 19 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 1 & 4 & 7 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 17$
$20 * 8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 3 & 7 & 5 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = 16$	$20 * 20 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = I$
$20 * 9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 4 & 8 & 6 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} = 2$	$20 * 21 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 8 & 5 & 2 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} = 11$
$20 * 10 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 1 & 5 & 7 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} = 13$	$20 * 22 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 3$
$20 * 11 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 4 & 3 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 21$	$20 * 23 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 8 & 4 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 18$
$20 * 12 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 8 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 24$	$20 * 24 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 6 & 2 & 4 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix} = 12$

$21 * I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 4 & 3 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 21$	$21 * 13 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 5 & 1 & 3 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix} = 22$
$21 * 2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 8 & 4 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 18$	$21 * 14 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 7 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 23$
$21 * 3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 7 & 8 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} = 7$	$21 * 15 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = 10$
$21 * 4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 3 & 7 & 5 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = 16$	$21 * 16 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 7 & 3 & 1 & 5 & 8 & 4 \end{pmatrix} = 4$
$21 * 5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 9$	$21 * 17 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} = 8$
$21 * 6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix} = 19$	$21 * 18 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 4 & 8 & 6 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} = 2$
$21 * 7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 3$	$21 * 19 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 6$
$21 * 8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 1 & 4 & 7 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 17$	$21 * 20 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 6 & 2 & 4 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix} = 12$
$21 * 9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 2 & 1 & 8 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 5$	$21 * 21 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = I$
$21 * 10 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 3 & 2 & 5 & 8 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 15$	$21 * 22 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 1 & 5 & 7 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} = 13$
$21 * 11 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 8 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 24$	$21 * 23 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix} = 14$

$21 * 12 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 2 & 6 & 8 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 20$	$21 * 24 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 8 & 5 & 2 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} = 11$
$22 * I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 5 & 1 & 3 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix} = 22$	$22 * 13 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 7 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 23$
$22 * 2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 6$	$22 * 14 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 4 & 3 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 21$
$22 * 3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 2 & 6 & 8 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 20$	$22 * 15 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix} = 19$
$22 * 4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 9$	$22 * 16 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 8 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 24$
$22 * 5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 8 & 5 & 2 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} = 11$	$22 * 17 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 7 & 8 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} = 7$
$22 * 6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 4 & 8 & 6 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} = 2$	$22 * 18 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = 10$
$22 * 7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 1 & 4 & 7 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 17$	$22 * 19 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 3 & 2 & 5 & 8 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 15$
$22 * 8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 6 & 2 & 4 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix} = 12$	$22 * 20 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 3$
$22 * 9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 7 & 3 & 1 & 5 & 8 & 4 \end{pmatrix} = 4$	$22 * 21 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix} = 14$
$22 * 10 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 8 & 4 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 18$	$22 * 22 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = I$
$22 * 11 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 2 & 1 & 8 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 5$	$22 * 23 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 1 & 5 & 7 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} = 13$
$22 * 12 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} = 8$	$22 * 24 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 3 & 7 & 5 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = 16$

$23 * I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 7 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 23$	$23 * 13 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 4 & 3 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 21$
$23 * 2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 3 & 2 & 5 & 8 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 15$	$23 * 14 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 5 & 1 & 3 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix} = 22$
$23 * 3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} = 8$	$23 * 15 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 4 & 8 & 6 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} = 2$
$23 * 4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 8 & 5 & 2 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} = 11$	$23 * 16 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 2 & 1 & 8 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 5$
$23 * 5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 3 & 7 & 5 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = 16$	$23 * 17 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 2 & 6 & 8 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 20$
$23 * 6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = 10$	$23 * 18 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix} = 19$
$23 * 7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 6 & 2 & 4 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix} = 12$	$23 * 19 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 8 & 4 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 18$
$23 * 8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 3$	$23 * 20 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 1 & 4 & 7 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 17$
$23 * 9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 8 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 24$	$23 * 21 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 1 & 5 & 7 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} = 13$
$23 * 10 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 6$	$23 * 22 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix} = 14$
$23 * 11 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 7 & 3 & 1 & 5 & 8 & 4 \end{pmatrix} = 4$	$23 * 23 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = I$

$23 * 12 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 7 & 8 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} = 7$	$23 * 24 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 7 & 8 & 6 & 5 \end{pmatrix} = 9$
$24 * I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 8 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 24$	$24 * 13 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 7 & 8 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} = 7$
$24 * 2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix} = 14$	$24 * 14 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 4 & 8 & 6 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} = 2$
$24 * 3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = 10$	$24 * 15 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 5 & 1 & 3 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix} = 22$
$24 * 4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 1 & 4 & 7 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 17$	$24 * 16 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix} = 19$
$24 * 5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 8 & 4 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 18$	$24 * 17 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 7 & 3 & 1 & 5 & 8 & 4 \end{pmatrix} = 4$
$24 * 6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} = 8$	$24 * 18 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 2 & 1 & 8 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 5$
$24 * 7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 1 & 5 & 7 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} = 13$	$24 * 19 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 3 & 7 & 5 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = 16$
$24 * 8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 6$	$24 * 20 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 8 & 5 & 2 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} = 11$
$24 * 9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 7 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 23$	$24 * 21 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 6 & 2 & 4 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix} = 12$
$24 * 10 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 3$	$24 * 22 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 3 & 2 & 5 & 8 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 15$
$24 * 11 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 2 & 6 & 8 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 20$	$24 * 23 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 9$
$24 * 12 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 4 & 3 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 21$	$24 * 24 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = I$

A Partir dels resultats anteriors he confeccionat la taula següent de:
Composició de moviments giratoris que deixen un cub invariable

*	I	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
I	I	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
2	2	3	4	I	13	20	16	11	22	17	23	5	19	10	8	21	24	7	12	9	18	6	15	14
3	3	4	I	2	19	9	21	23	6	24	15	13	12	17	11	18	14	16	5	22	7	20	8	10
4	4	I	2	3	12	22	18	15	20	14	8	19	5	24	23	7	10	21	13	6	16	9	11	17
5	5	17	21	15	6	7	I	13	19	12	2	23	24	4	20	10	22	8	3	14	9	11	16	18
6	6	22	9	20	7	I	5	24	3	23	17	16	18	15	14	12	11	13	21	4	19	2	10	8
7	7	11	19	14	I	5	6	18	21	16	22	10	8	20	4	23	2	24	9	15	3	17	12	13
8	8	13	24	18	15	23	11	9	10	I	19	4	20	7	21	2	5	22	14	16	17	12	3	6
9	9	20	6	22	21	3	19	10	I	8	14	18	16	11	17	13	15	12	7	2	5	4	24	23
10	10	16	23	12	17	24	14	I	8	9	7	22	2	19	5	20	21	4	11	13	15	18	6	3
11	11	19	14	7	8	15	23	22	17	2	12	I	9	16	18	3	13	6	10	21	24	5	4	20
12	12	10	16	23	22	18	4	5	13	19	I	11	17	3	6	14	9	15	2	24	20	8	7	21
13	13	24	18	8	20	16	2	19	12	5	3	15	14	I	9	17	6	11	4	10	22	23	21	7
14	14	7	11	16	10	17	24	4	15	20	18	9	I	13	12	6	16	3	8	5	23	21	22	2
15	15	5	17	21	23	11	8	20	14	4	13	3	6	18	16	I	12	9	24	7	10	19	2	22
16	16	23	12	10	2	13	20	7	18	21	6	17	11	9	I	15	3	14	22	8	4	24	5	19
17	17	21	15	5	24	14	10	2	11	22	16	6	3	12	13	9	18	I	23	19	8	7	20	4
18	18	8	13	24	4	12	22	21	16	7	9	14	15	6	3	11	I	17	20	23	2	10	19	5
19	19	13	7	11	9	21	3	12	5	13	4	8	10	2	22	24	20	23	I	17	6	15	18	16
20	20	6	22	9	16	2	13	14	4	15	24	21	7	8	10	5	23	19	18	I	12	3	17	11
21	21	15	5	17	3	19	9	16	7	18	20	24	23	22	2	8	4	10	6	11	I	14	13	12
22	22	9	20	6	18	4	12	17	2	11	10	7	21	23	24	19	8	5	16	3	13	I	14	15
23	23	12	10	16	11	8	15	6	24	3	5	2	22	21	7	4	19	20	17	18	14	13	I	9
24	24	18	8	13	14	10	17	3	23	6	21	20	4	5	19	22	7	2	15	12	11	16	9	I

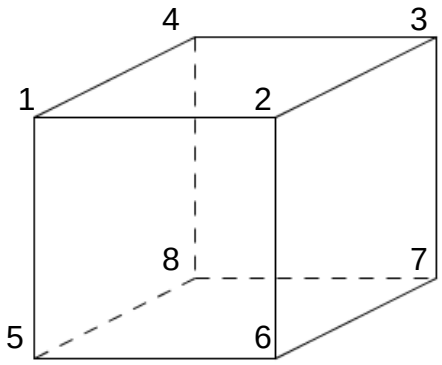
La meva hipòtesi inicial era que algun espai de l'anterior taula no pogués ser omplert ja que pensava que, a partir de la composició de dos moviments qualsevol, no sempre obtindria un altre dels moviments definits. Però un cop realitzades totes les operacions, he pogut comprovar que la meva hipòtesi no era correcta i s'ha pogut omplir completament. Demostrant que els 24 moviments giratoris d'un cub, formen un conjunt tancat.

Un cop realitzada aquesta taula l'he analitzat detalladament i he pogut observar que hi ha una sèrie de subconjunts marcats de color lila on es pot veure que hi ha una repetició de la identitat i de números consecutius en petites quadrícules.

4.3 SIMETRIES

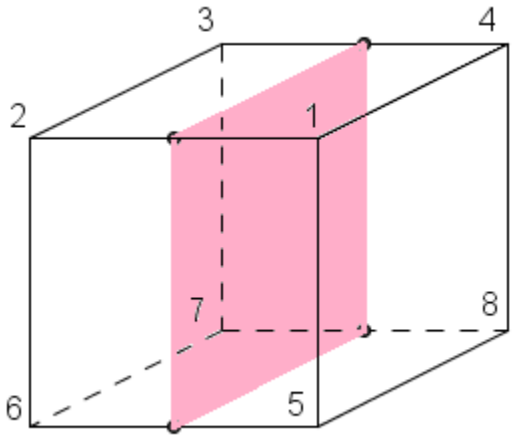
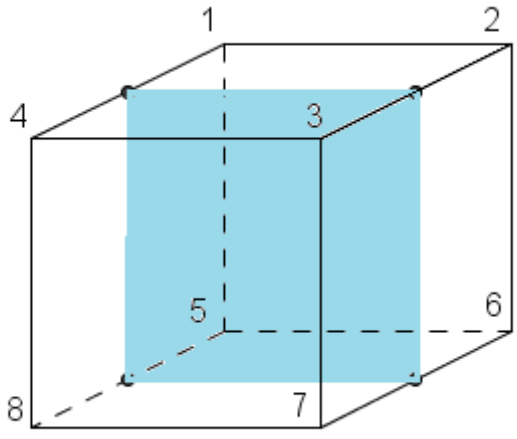
També existeix una altra manera de modificar la posició de cada vèrtex d'un cub, però sempre deixant-lo visiblement invariable. Aquesta manera és utilitzant plans de simetria que tallen el cub per diferents posicions, i inverteixen la posició dels vèrtexs.

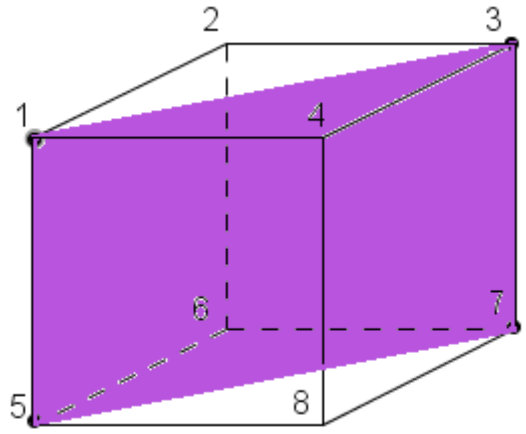
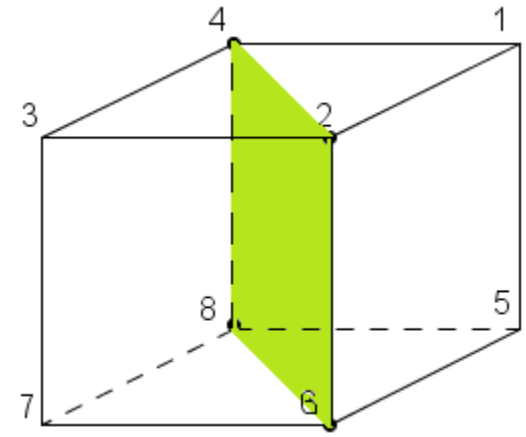
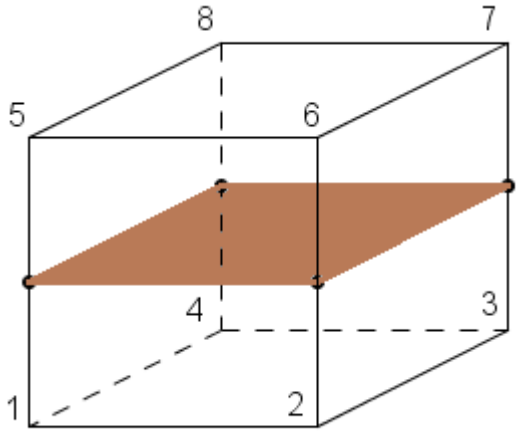
Prendré com a posició inicial i Identitat, els mateixos valors que abans:

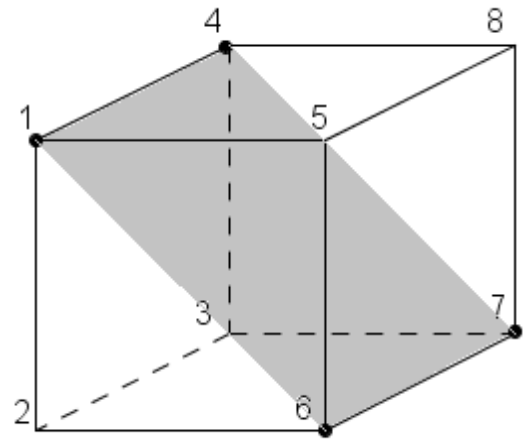


$$I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

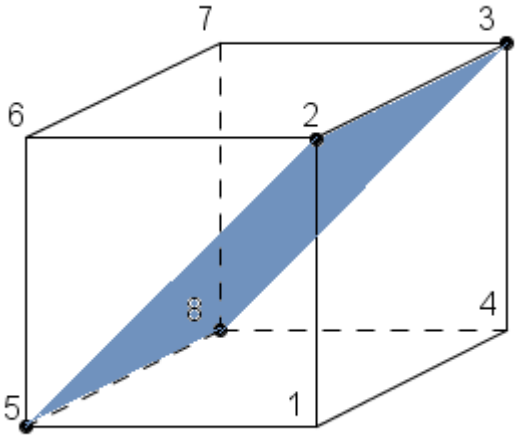
Respecte a la nomenclatura de cada simetria, partirem de l'últim gir (M24).

	$M25 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix}$
	$M26 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

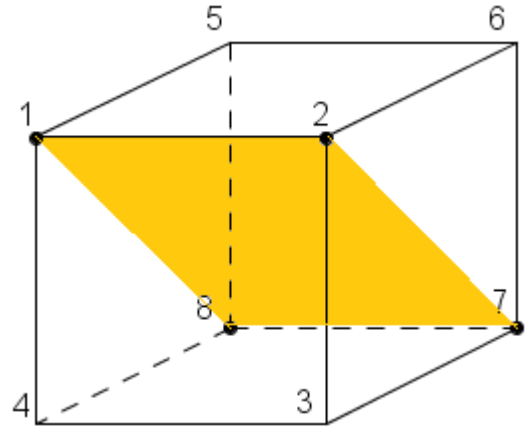
	$M27 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}$
	$M28 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 7 & 6 & 5 & 8 \end{pmatrix}$
	$M29 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$



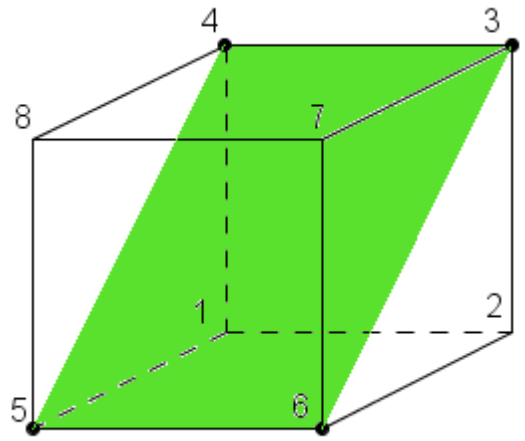
$$M30 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 8 & 4 & 2 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$



$$M31 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 3 & 7 & 5 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$



$$M32 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 6 & 5 & 4 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$



$$M33 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

4.4 COMPOSICIÓ DE SIMETRIES

A continuació comprovaré si aquest conjunt de simetries, aplicant-les consecutivament, formen un conjunt tancat. Seguirem el mateix procediment d'operació de matrius. (Mirar composicions de moviments giratoris)
Cal recordar que la lectura de les matrius serà la següent:

$$X * Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ a & b & c & d & e & f & g & h \end{pmatrix} = Z$$

X = primer moviment
Y = segon moviment
1, 2…7, 8 = posició inicial de cada vèrtex
a, b…g, h = posició final de cada vèrtex
Z = moviment resultant

$25 * 25 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = I$	$26 * 25 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 9$
$25 * 26 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 9$	$26 * 26 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = I$
$25 * 27 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = 10$	$26 * 27 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} = 8$
$25 * 28 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} = 8$	$26 * 28 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = 10$
$25 * 29 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 3$	$26 * 29 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 6$
$25 * 30 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 4 & 8 & 6 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} = 2$	$26 * 30 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 5 & 1 & 3 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix} = 22$
$25 * 31 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 7 & 3 & 1 & 5 & 8 & 4 \end{pmatrix} = 4$	$26 * 31 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 2 & 6 & 8 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 20$
$25 * 32 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix} = 19$	$26 * 32 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 2 & 1 & 8 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 5$
$25 * 33 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 4 & 3 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 21$	$26 * 33 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 7 & 8 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} = 7$

$27 * 25 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} = 8$	$28 * 25 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = 10$
$27 * 26 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = 10$	$28 * 26 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} = 8$
$27 * 27 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = I$	$28 * 27 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 9$
$27 * 28 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 9$	$28 * 28 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = I$
$27 * 29 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 7 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 23$	$28 * 29 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 8 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 24$
$27 * 30 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 8 & 5 & 2 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} = 11$	$28 * 30 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 1 & 4 & 7 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 17$
$27 * 31 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 3 & 2 & 5 & 8 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 15$	$28 * 31 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix} = 14$
$27 * 32 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 6 & 2 & 4 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix} = 12$	$28 * 32 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 1 & 5 & 7 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} = 13$
$27 * 33 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 3 & 7 & 5 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = 16$	$28 * 33 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 8 & 4 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 18$

$29 * 25 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 3$	$30 * 25 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 7 & 3 & 1 & 6 & 8 & 4 \end{pmatrix} = 4$
$29 * 26 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 6$	$30 * 26 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 5 & 1 & 3 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix} = 22$
$29 * 27 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 7 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 23$	$30 * 27 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 6 & 2 & 4 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix} = 12$
$29 * 28 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 8 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 24$	$30 * 28 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 8 & 4 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 18$
$29 * 29 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = I$	$30 * 29 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 4 & 8 & 6 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} = 2$
$29 * 30 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 7 & 3 & 1 & 5 & 8 & 4 \end{pmatrix} = 4$	$30 * 30 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = I$
$29 * 31 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 4 & 8 & 6 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} = 2$	$30 * 31 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 3$
$29 * 32 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 7 & 8 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} = 7$	$30 * 32 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 8 & 5 & 2 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} = 11$
$29 * 33 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 2 & 1 & 8 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 5$	$30 * 33 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 1 & 4 & 7 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 17$

$31 * 25 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 4 & 8 & 6 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} = 2$	$32 * 25 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix} = 19$
$31 * 26 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 2 & 6 & 8 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 20$	$32 * 26 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 7 & 8 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} = 7$
$31 * 27 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 3 & 7 & 5 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = 16$	$32 * 27 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 8 & 5 & 2 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} = 11$
$31 * 28 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 1 & 5 & 7 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} = 13$	$32 * 28 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix} = 14$
$31 * 29 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 7 & 3 & 1 & 5 & 8 & 4 \end{pmatrix} = 4$	$32 * 29 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 2 & 1 & 8 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 5$
$31 * 30 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 3$	$32 * 30 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 6 & 2 & 4 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix} = 12$
$31 * 31 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = I$	$32 * 31 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 1 & 5 & 7 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} = 13$
$31 * 32 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix} = 14$	$32 * 32 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = I$
$31 * 33 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 3 & 2 & 5 & 8 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 15$	$32 * 33 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 6$

$33 * 25 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 4 & 3 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 21$
$33 * 26 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 2 & 1 & 8 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 5$
$33 * 27 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 3 & 2 & 5 & 8 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 15$
$33 * 28 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 1 & 4 & 7 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 17$
$33 * 29 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 7 & 8 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} = 7$
$33 * 30 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 8 & 4 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 18$
$33 * 31 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 3 & 7 & 5 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = 16$
$33 * 32 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 6$
$33 * 33 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = I$

Tenint en compte els resultats anteriors, podrem elaborar la següent taula:

*	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**	**33**
25	I	9	8	10	3	4	2	19	21
26	9	I	10	8	6	22	20	7	5
27	10	8	I	9	23	12	16	11	15
28	8	10	9	I	24	18	13	14	17
29	3	6	23	24	I	2	4	5	7
30	2	22	11	17	4	I	3	12	18
31	4	20	15	14	2	3	I	13	16
32	19	5	12	13	7	11	14	I	6
33	21	7	16	18	5	17	15	6	I

Puc veure que dels resultats obtinguts a la taula, cap pertany als moviment del 25 al 33, que son els que s'han operat. En canvi, s'han obtingut moviments d'entre l'I al 24. Això ens demostra que, del moviment 25 al 33, no és un conjunt tancat.

4.5 COMPOSICIONS DE MOVIMENTS GIRATORIS I SIMETRIES

Partint dels resultats que del moviment I al 24 (moviments giratoris) formen un conjunt tancat i que del moviment 25 al 33 (simetries) formen un conjunt no tancat, em proposo comprovar si ajuntant els moviments giratoris amb les simetries, es pot arribar a aconseguir un conjunt tancat.

$I * 25 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix} = 25$	$2 * 25 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 3 & 7 & 5 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix} = 31$
$I * 26 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} = 26$	$2 * 26 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 1 & 5 & 7 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} =/$
$I * 27 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix} == 27$	$2 * 27 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 8 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix} =/$
$I * 28 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 7 & 6 & 5 & 8 \end{pmatrix} = 28$	$2 * 28 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 4 & 8 & 6 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} =/$
$I * 29 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 29$	$2 * 29 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 8 & 4 & 2 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix} = 30$
$I * 30 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 8 & 4 & 2 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix} = 30$	$2 * 30 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix} = 25$
$I * 31 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 3 & 7 & 5 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix} = 31$	$2 * 31 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 29$
$I * 32 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 6 & 5 & 4 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} = 32$	$2 * 32 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 5 & 8 & 3 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} =/$
$I * 33 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 33$	$2 * 33 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 4 & 1 & 6 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix} =/$

$3 * 25 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 29$	$4 * 25 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 8 & 4 & 2 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix} = 30$
$3 * 26 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 5 & 6 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} =/$	$4 * 26 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 6 & 2 & 4 & 8 & 5 & 1 \end{pmatrix} =/$
$3 * 27 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 6 & 7 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} =/$	$4 * 27 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 7 & 3 & 1 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} =/$
$3 * 28 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 8 & 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} =/$	$4 * 28 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 5 & 1 & 3 & 7 & 8 & 4 \end{pmatrix} =/$
$3 * 29 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix} = 25$	$4 * 29 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 3 & 7 & 5 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix} = 31$
$3 * 30 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 3 & 7 & 5 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix} = 31$	$4 * 30 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 29$
$3 * 31 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 8 & 4 & 2 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix} = 30$	$4 * 31 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix} = 25$
$3 * 32 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 8 & 7 & 2 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} =/$	$4 * 32 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 6 & 1 & 4 & 8 & 5 \end{pmatrix} =/$
$3 * 33 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 1 & 2 & 7 & 8 & 4 & 3 \end{pmatrix} =/$	$4 * 33 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 2 & 3 & 8 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} =/$

$5 * 25 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 1 & 2 & 7 & 8 & 4 & 3 \end{pmatrix} =/$	$6 * 25 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 5 & 6 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} =/$
$5 * 26 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 33$	$6 * 26 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 29$
$5 * 27 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 4 & 1 & 6 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix} =/$	$6 * 27 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 8 & 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} =/$
$5 * 28 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 2 & 3 & 8 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} =/$	$6 * 28 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 6 & 7 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} =/$
$5 * 29 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 2 & 3 & 8 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 32$	$6 * 29 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} = 26$
$5 * 30 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 5 & 1 & 3 & 7 & 8 & 4 \end{pmatrix} =/$	$6 * 30 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 6 & 2 & 4 & 8 & 5 & 1 \end{pmatrix} =/$
$5 * 31 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 8 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix} =/$	$6 * 31 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 1 & 5 & 7 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} =/$
$5 * 32 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} = 26$	$6 * 32 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 33$
$5 * 33 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 29$	$6 * 33 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 6 & 5 & 4 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} = 32$

$7 * 25 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 8 & 7 & 2 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} =/$	$8 * 25 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix} = 27$
$7 * 26 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 6 & 5 & 4 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} = 32$	$8 * 26 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 7 & 6 & 5 & 8 \end{pmatrix} = 28$
$7 * 27 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 6 & 1 & 4 & 8 & 5 \end{pmatrix} /=$	$8 * 27 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} = 26$
$7 * 28 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 5 & 8 & 3 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} =/$	$8 * 28 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix} = 25$
$7 * 29 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 33$	$8 * 29 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 8 & 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} =/$
$7 * 30 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 7 & 3 & 1 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} =/$	$8 * 30 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 4 & 1 & 6 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix} =/$
$7 * 31 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 4 & 8 & 6 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} =/$	$8 * 31 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 6 & 1 & 4 & 8 & 5 \end{pmatrix} =/$
$7 * 32 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 29$	$8 * 32 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 5 & 1 & 3 & 7 & 8 & 4 \end{pmatrix} =/$
$7 * 33 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} = 26$	$8 * 33 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 4 & 8 & 6 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} =/$

$9 * 25 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} = 26$	$10 * 25 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 7 & 6 & 5 & 8 \end{pmatrix} = 28$
$9 * 26 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix} = 25$	$10 * 26 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix} = 27$
$9 * 27 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 7 & 6 & 5 & 8 \end{pmatrix} = 28$	$10 * 27 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix} = 25$
$9 * 28 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix} = 27$	$10 * 28 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} = 26$
$9 * 29 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 5 & 6 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} =/$	$10 * 29 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 6 & 7 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} =/$
$9 * 30 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 1 & 5 & 7 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} =/$	$10 * 30 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 5 & 8 & 3 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} =/$
$9 * 31 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 6 & 2 & 4 & 8 & 5 & 1 \end{pmatrix} =/$	$10 * 31 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 2 & 3 & 8 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} =/$
$9 * 32 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 1 & 2 & 7 & 8 & 4 & 3 \end{pmatrix} =/$	$10 * 32 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 8 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix} =/$
$9 * 33 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 8 & 7 & 2 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} =/$	$10 * 33 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 7 & 3 & 1 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} =/$

$11 * 25 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 6 & 1 & 4 & 8 & 5 \end{pmatrix} =/$	$12 * 25 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 5 & 1 & 3 & 7 & 8 & 4 \end{pmatrix} =/$
$11 * 26 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 5 & 8 & 3 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} =/$	$12 * 26 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 7 & 3 & 1 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} =/$
$11 * 27 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 6 & 5 & 4 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} = 32$	$12 * 27 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 8 & 4 & 2 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix} = 30$
$11 * 28 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 8 & 7 & 2 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} =/$	$12 * 28 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 6 & 2 & 4 & 8 & 5 & 1 \end{pmatrix} =/$
$11 * 29 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 4 & 1 & 6 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix} =/$	$12 * 29 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 8 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix} =/$
$11 * 30 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix} = 27$	$12 * 30 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 6 & 5 & 4 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} = 32$
$11 * 31 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 8 & 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} =/$	$12 * 31 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 1 & 2 & 7 & 8 & 4 & 3 \end{pmatrix} =/$
$11 * 32 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 8 & 4 & 2 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix} = 30$	$12 * 32 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix} = 27$
$11 * 33 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 1 & 5 & 7 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} =/$	$12 * 33 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 6 & 7 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} =/$

$13 * 25 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 8 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix} =/$	$14 * 25 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 5 & 8 & 3 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} =/$
$13 * 26 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 4 & 8 & 6 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} =/$	$14 * 26 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 6 & 1 & 4 & 8 & 5 \end{pmatrix} =/$
$13 * 27 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 1 & 5 & 7 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} =/$	$14 * 27 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 8 & 7 & 2 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} =/$
$13 * 28 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 3 & 7 & 5 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix} = 31$	$14 * 28 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 6 & 5 & 4 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} = 33$
$13 * 29 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 5 & 1 & 3 & 7 & 8 & 4 \end{pmatrix} =/$	$14 * 29 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 2 & 3 & 8 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} =/$
$13 * 30 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 1 & 2 & 7 & 8 & 4 & 3 \end{pmatrix} =/$	$14 * 30 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 6 & 7 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} =/$
$13 * 31 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 6 & 5 & 4 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} = 33$	$14 * 31 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 7 & 6 & 5 & 8 \end{pmatrix} = 28$
$13 * 32 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 7 & 6 & 5 & 8 \end{pmatrix} = 28$	$14 * 32 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 3 & 7 & 5 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix} = 31$
$13 * 33 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 8 & 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} =/$	$14 * 33 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 6 & 2 & 4 & 8 & 5 & 1 \end{pmatrix} =/$

$15 * 25 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 4 & 1 & 6 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix} =/$	$16 * 25 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 4 & 8 & 6 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} =/$
$15 * 26 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 2 & 3 & 8 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} =/$	$16 * 26 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 8 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix} =/$
$15 * 27 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 33$	$16 * 27 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 3 & 7 & 5 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix} = 31$
$15 * 28 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 1 & 2 & 7 & 8 & 4 & 3 \end{pmatrix} =/$	$16 * 28 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 1 & 5 & 7 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} =/$
$15 * 29 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 6 & 1 & 4 & 8 & 5 \end{pmatrix} =/$	$16 * 29 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 7 & 3 & 1 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} =/$
$15 * 30 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 8 & 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} =/$	$16 * 30 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 8 & 7 & 2 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} =/$
$15 * 31 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix} = 27$	$16 * 31 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 33$
$15 * 32 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 6 & 2 & 4 & 8 & 5 & 1 \end{pmatrix} =/$	$16 * 32 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 6 & 7 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} =/$
$15 * 33 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 3 & 7 & 5 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix} = 31$	$16 * 33 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix} = 27$

$17 * 25 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 2 & 3 & 8 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} =/$	$18 * 25 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 7 & 3 & 1 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} =/$
$17 * 26 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 4 & 1 & 6 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix} =/$	$18 * 26 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 5 & 1 & 3 & 7 & 8 & 4 \end{pmatrix} =/$
$17 * 27 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 1 & 2 & 7 & 8 & 4 & 3 \end{pmatrix} =/$	$18 * 27 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 6 & 2 & 4 & 8 & 5 & 1 \end{pmatrix} =/$
$17 * 28 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 33$	$18 * 28 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 8 & 4 & 2 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix} = 30$
$17 * 29 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 5 & 6 & 3 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} =/$	$18 * 29 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 4 & 8 & 6 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} =/$
$17 * 30 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 7 & 6 & 5 & 8 \end{pmatrix} = 28$	$18 * 30 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 33$
$17 * 31 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 6 & 7 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} =/$	$18 * 31 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 8 & 7 & 2 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} =/$
$17 * 32 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 1 & 5 & 7 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} =/$	$18 * 32 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 8 & 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} =/$
$17 * 33 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 8 & 4 & 2 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix} = 30$	$18 * 33 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 7 & 6 & 5 & 8 \end{pmatrix} = 28$

$19 * 25 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 6 & 5 & 4 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} = 32$	$20 * 25 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 1 & 5 & 7 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} =/$
$19 * 26 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 8 & 7 & 2 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} =/$	$20 * 26 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 3 & 7 & 5 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix} = 31$
$19 * 27 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 5 & 8 & 3 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} =/$	$20 * 27 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 4 & 8 & 6 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} =/$
$19 * 28 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 6 & 1 & 4 & 8 & 5 \end{pmatrix} =/$	$20 * 28 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 8 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix} =/$
$19 * 29 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 1 & 2 & 7 & 8 & 4 & 3 \end{pmatrix} =/$	$20 * 29 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 6 & 2 & 4 & 8 & 5 & 1 \end{pmatrix} =/$
$19 * 30 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 8 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix} =/$	$20 * 30 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 5 & 6 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} =/$
$19 * 31 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 5 & 1 & 3 & 7 & 8 & 4 \end{pmatrix} =/$	$20 * 31 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} = 26$
$19 * 32 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix} = 25$	$20 * 32 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 2 & 3 & 8 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} =/$
$19 * 33 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 5 & 6 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} =/$	$20 * 33 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 6 & 1 & 4 & 8 & 5 \end{pmatrix} =/$

$21 * 25 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 33$	$22 * 25 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 6 & 2 & 4 & 8 & 5 & 1 \end{pmatrix} =/$
$21 * 26 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 1 & 2 & 7 & 8 & 4 & 3 \end{pmatrix} =/$	$22 * 26 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 8 & 4 & 2 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix} = 30$
$21 * 27 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 2 & 3 & 8 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} =/$	$22 * 27 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 5 & 1 & 3 & 7 & 8 & 4 \end{pmatrix} =/$
$21 * 28 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 4 & 1 & 6 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix} =/$	$22 * 28 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 7 & 3 & 1 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} =/$
$21 * 29 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 8 & 7 & 2 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} =/$	$22 * 29 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 1 & 5 & 7 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} =/$
$21 * 30 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 4 & 8 & 6 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} =/$	$22 * 30 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} = 26$
$21 * 31 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 7 & 3 & 1 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} =/$	$22 * 31 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 5 & 6 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} =/$
$21 * 32 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 5 & 6 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} =/$	$22 * 32 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 4 & 1 & 6 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix} =/$
$21 * 33 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix} = 25$	$22 * 33 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 5 & 8 & 3 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} =/$

$23 * 25 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 8 & 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} =/$	$24 * 25 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 6 & 7 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} =/$
$23 * 26 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 6 & 7 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} =/$	$24 * 26 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 8 & 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} =/$
$23 * 27 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 29$	$24 * 27 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 5 & 6 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} =/$
$23 * 28 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 5 & 6 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} =/$	$24 * 28 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 29$
$23 * 29 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix} = 27$	$24 * 29 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 7 & 6 & 5 & 8 \end{pmatrix} = 28$
$23 * 30 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 6 & 1 & 4 & 8 & 5 \end{pmatrix} =/$	$24 * 30 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 2 & 3 & 8 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} =/$
$23 * 31 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 4 & 1 & 6 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix} =/$	$24 * 31 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 5 & 8 & 3 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} =/$
$23 * 32 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 7 & 3 & 1 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} =/$	$24 * 32 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 4 & 8 & 6 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} =/$
$23 * 33 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 8 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix} =/$	$24 * 33 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 5 & 1 & 3 & 7 & 8 & 4 \end{pmatrix} =/$

$25 * I = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&1&4&3&6&5&8&7\end{pmatrix} = 25$	$26 * I = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\4&3&2&1&8&7&6&5\end{pmatrix} = 26$
$25 * 2 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&5&8&4&2&6&7&3\end{pmatrix} = 30$	$26 * 2 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&4&1&5&7&3&2&6\end{pmatrix} =/$
$25 * 3 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&6&7&8&1&2&3&4\end{pmatrix} = 29$	$26 * 3 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&8&5&6&3&4&1&2\end{pmatrix} =/$
$25 * 4 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&2&3&7&5&1&4&8\end{pmatrix} = 31$	$26 * 4 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&7&6&2&4&8&5&1\end{pmatrix} =/$
$25 * 5 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&5&1&2&7&8&4&3\end{pmatrix} =/$	$26 * 5 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&2&6&5&4&3&7&8\end{pmatrix} = 32$
$25 * 6 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&8&5&6&3&4&1&2\end{pmatrix} =/$	$26 * 6 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&6&7&8&1&2&3&4\end{pmatrix} = 29$
$25 * 7 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&4&8&7&2&1&5&6\end{pmatrix} =/$	$26 * 7 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&7&3&4&5&6&2&1\end{pmatrix} = 33$
$25 * 8 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&2&1&4&7&6&5&8\end{pmatrix} =/$	$26 * 8 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&4&3&2&5&8&7&6\end{pmatrix} = 27$
$25 * 9 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\4&3&2&1&8&7&6&5\end{pmatrix} = 26$	$26 * 9 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&1&4&3&6&5&8&7\end{pmatrix} = 25$
$25 * 10 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&4&3&2&5&8&7&6\end{pmatrix} = 27$	$26 * 10 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&2&1&4&7&6&5&8\end{pmatrix} = 28$
$25 * 11 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\4&1&5&8&3&2&6&7\end{pmatrix} =/$	$26 * 11 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&8&4&1&6&7&3&2\end{pmatrix} =/$
$25 * 12 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&1&2&6&8&4&3&7\end{pmatrix} =/$	$26 * 12 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&6&5&1&3&7&8&4\end{pmatrix} =/$
$25 * 13 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&6&5&1&3&7&8&4\end{pmatrix} =/$	$26 * 13 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&1&2&6&8&4&3&7\end{pmatrix} =/$
$25 * 14 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&3&7&6&1&4&8&5\end{pmatrix} =/$	$26 * 14 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&6&2&3&8&5&1&4\end{pmatrix} =/$
$25 * 15 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&6&2&3&8&5&1&4\end{pmatrix} =/$	$26 * 15 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&3&7&6&1&4&8&5\end{pmatrix} =/$
$25 * 16 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\4&8&7&3&1&5&6&2\end{pmatrix} =/$	$26 * 16 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&3&4&8&6&2&1&5\end{pmatrix} =/$
$25 * 17 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&8&4&1&6&7&3&2\end{pmatrix} =/$	$26 * 17 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\4&1&5&8&3&2&6&7\end{pmatrix} =/$
$25 * 18 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&3&4&8&6&2&1&5\end{pmatrix} =/$	$26 * 18 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\4&8&7&3&1&5&6&2\end{pmatrix} =/$
$25 * 19 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&2&6&5&4&3&7&8\end{pmatrix} = 32$	$26 * 19 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&5&1&2&7&8&4&3\end{pmatrix} =/$
$25 * 20 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&7&6&2&4&8&5&1\end{pmatrix} =/$	$26 * 20 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&2&3&7&5&1&4&8\end{pmatrix} = 31$
$25 * 21 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&7&3&4&5&6&2&1\end{pmatrix} = 33$	$26 * 21 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&4&8&7&2&1&5&6\end{pmatrix} =/$
$25 * 22 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&4&1&5&7&3&2&6\end{pmatrix} =/$	$26 * 22 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&5&8&4&2&6&7&3\end{pmatrix} = 30$
$25 * 23 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&5&6&7&4&1&2&3\end{pmatrix} =/$	$26 * 23 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&7&8&5&2&3&4&1\end{pmatrix} =/$
$25 * 24 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&7&8&5&2&3&4&1\end{pmatrix} =/$	$26 * 24 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&5&6&7&4&1&2&3\end{pmatrix} =/$

$27 * I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix} = 27$	$28 * I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 7 & 6 & 5 & 8 \end{pmatrix} = 28$
$27 * 2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 4 & 1 & 6 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix} =/$	$28 * 2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 5 & 8 & 3 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} =/$
$27 * 3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 8 & 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} =/$	$28 * 3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 6 & 7 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} =/$
$27 * 4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 6 & 1 & 4 & 8 & 5 \end{pmatrix} =/$	$28 * 4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 2 & 3 & 8 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} =/$
$27 * 5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 8 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix} =/$	$28 * 5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 5 & 1 & 3 & 7 & 8 & 4 \end{pmatrix} =/$
$27 * 6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 6 & 7 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} =/$	$28 * 6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 8 & 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} =/$
$27 * 7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 7 & 3 & 1 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} =/$	$28 * 7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 4 & 8 & 6 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} =/$
$27 * 8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix} = 25$	$28 * 8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} = 26$
$27 * 9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 7 & 6 & 5 & 8 \end{pmatrix} = 28$	$28 * 9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix} = 27$
$27 * 10 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} = 26$	$28 * 10 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix} = 25$
$27 * 11 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 8 & 4 & 2 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix} = 30$	$28 * 11 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 1 & 5 & 7 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} =/$
$27 * 12 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 6 & 5 & 4 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} = 32$	$28 * 12 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 1 & 2 & 7 & 8 & 4 & 3 \end{pmatrix} =/$
$27 * 13 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 1 & 2 & 7 & 8 & 4 & 3 \end{pmatrix} =/$	$28 * 13 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 6 & 5 & 4 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} = 32$
$27 * 14 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 6 & 2 & 4 & 8 & 5 & 1 \end{pmatrix} =/$	$28 * 14 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 3 & 7 & 5 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix} = 31$
$27 * 15 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 3 & 7 & 5 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix} = 31$	$28 * 15 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 6 & 2 & 4 & 8 & 5 & 1 \end{pmatrix} =/$
$27 * 16 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 33$	$28 * 16 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 8 & 7 & 2 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} =/$
$27 * 17 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 1 & 5 & 7 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} =/$	$28 * 17 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 8 & 4 & 2 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix} = 30$
$27 * 18 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 8 & 7 & 2 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} =/$	$28 * 18 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 33$
$27 * 19 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 5 & 1 & 3 & 7 & 8 & 4 \end{pmatrix} =/$	$28 * 19 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 8 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix} =/$
$27 * 20 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 2 & 3 & 8 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} =/$	$28 * 20 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 6 & 1 & 4 & 8 & 5 \end{pmatrix} =/$
$27 * 21 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 4 & 8 & 6 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} =/$	$28 * 21 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 7 & 3 & 1 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} =/$
$27 * 22 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 5 & 8 & 3 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} =/$	$28 * 22 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 4 & 1 & 6 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 29$
$27 * 23 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 29$	$28 * 23 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 5 & 6 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} =/$
$27 * 24 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 5 & 6 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} =/$	$28 * 24 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 29$

$29 * I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 29$	$30 * I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 8 & 4 & 2 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix} = 30$
$29 * 2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 3 & 7 & 5 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix} = 31$	$30 * 2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 29$
$29 * 3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix} = 25$	$30 * 3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 3 & 7 & 5 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix} = 31$
$29 * 4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 8 & 4 & 2 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix} = 30$	$30 * 4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix} = 25$
$29 * 5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 33$	$30 * 5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 4 & 1 & 6 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix} =/$
$29 * 6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} = 26$	$30 * 6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 1 & 5 & 7 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} =/$
$29 * 7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 6 & 5 & 4 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} = 32$	$30 * 7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 5 & 8 & 3 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} =/$
$29 * 8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 8 & 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} =/$	$30 * 8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 5 & 1 & 3 & 7 & 8 & 4 \end{pmatrix} =/$
$29 * 9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 5 & 6 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} =/$	$30 * 9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 6 & 2 & 4 & 8 & 5 & 1 \end{pmatrix} =/$
$29 * 10 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 6 & 7 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} =/$	$30 * 10 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 7 & 3 & 1 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} =/$
$29 * 11 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 6 & 1 & 4 & 8 & 5 \end{pmatrix} =/$	$30 * 11 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 6 & 5 & 4 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} = 32$
$29 * 12 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 7 & 3 & 1 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} =/$	$30 * 12 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix} = 27$
$29 * 13 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 4 & 8 & 6 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} =/$	$30 * 13 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 8 & 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} =/$
$29 * 14 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 5 & 8 & 3 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} =/$	$30 * 14 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 8 & 7 & 2 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} =/$
$29 * 15 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 4 & 1 & 6 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix} =/$	$30 * 15 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 1 & 2 & 7 & 8 & 4 & 3 \end{pmatrix} =/$
$29 * 16 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 8 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix} =/$	$30 * 16 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 6 & 7 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} =/$
$29 * 17 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 2 & 3 & 8 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} =/$	$30 * 17 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 33$
$29 * 18 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 5 & 1 & 3 & 7 & 8 & 4 \end{pmatrix} =/$	$30 * 18 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 7 & 6 & 5 & 8 \end{pmatrix} = 28$
$29 * 19 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 8 & 7 & 2 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} =/$	$30 * 19 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 6 & 1 & 4 & 8 & 5 \end{pmatrix} =/$
$29 * 20 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 1 & 5 & 7 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} =/$	$30 * 20 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 5 & 6 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} =/$
$29 * 21 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 1 & 2 & 7 & 8 & 4 & 3 \end{pmatrix} =/$	$30 * 21 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 2 & 3 & 8 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} =/$
$29 * 22 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 6 & 2 & 4 & 8 & 5 & 1 \end{pmatrix} =/$	$30 * 22 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} = 26$
$29 * 23 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix} = 27$	$30 * 23 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 8 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix} =/$
$29 * 24 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 7 & 6 & 5 & 8 \end{pmatrix} = 28$	$30 * 24 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 4 & 8 & 6 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} =/$

$31 * I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 3 & 7 & 5 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix} = 31$	$32 * I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 6 & 5 & 4 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} = 32$
$31 * 2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix} = 25$	$32 * 2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 8 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix} =/$
$31 * 3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 8 & 4 & 2 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix} = 30$	$32 * 3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 1 & 2 & 7 & 8 & 4 & 3 \end{pmatrix} =/$
$31 * 4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 29$	$32 * 4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 5 & 1 & 3 & 7 & 8 & 4 \end{pmatrix} =/$
$31 * 5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 2 & 3 & 8 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} =/$	$32 * 5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 29$
$31 * 6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 6 & 2 & 4 & 8 & 5 & 1 \end{pmatrix} =/$	$32 * 6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 33$
$31 * 7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 6 & 1 & 4 & 8 & 5 \end{pmatrix} =/$	$32 * 7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} =/$
$31 * 8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 4 & 8 & 6 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} =/$	$32 * 8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 6 & 1 & 4 & 8 & 5 \end{pmatrix} =/$
$31 * 9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 1 & 5 & 7 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} =/$	$32 * 9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 8 & 7 & 2 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} =/$
$31 * 10 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 8 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix} =/$	$32 * 10 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 5 & 8 & 3 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} =/$
$31 * 11 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 8 & 7 & 2 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} =/$	$32 * 11 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix} = 27$
$31 * 12 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 6 & 7 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} =/$	$32 * 12 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 8 & 4 & 2 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix} = 30$
$31 * 13 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 7 & 6 & 5 & 8 \end{pmatrix} = 28$	$32 * 13 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 3 & 7 & 5 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix} = 31$
$31 * 14 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 6 & 5 & 4 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} = 32$	$32 * 14 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 7 & 6 & 5 & 8 \end{pmatrix} = 28$
$31 * 15 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 33$	$32 * 15 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 8 & 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} =/$
$31 * 16 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix} = 27$	$32 * 16 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 1 & 5 & 7 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} =/$
$31 * 17 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 1 & 2 & 7 & 8 & 4 & 3 \end{pmatrix} =/$	$32 * 17 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 6 & 7 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} =/$
$31 * 18 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 8 & 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} =/$	$32 * 18 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 6 & 2 & 4 & 8 & 5 & 1 \end{pmatrix} =/$
$31 * 19 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 5 & 8 & 3 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} =/$	$32 * 19 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix} = 25$
$31 * 20 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} = 26$	$32 * 20 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 4 & 8 & 6 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} =/$
$31 * 21 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 4 & 1 & 6 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix} =/$	$32 * 21 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 5 & 6 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} =/$
$31 * 22 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 5 & 6 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} =/$	$32 * 22 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 7 & 3 & 1 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} =/$
$31 * 23 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 7 & 3 & 1 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} =/$	$32 * 23 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 4 & 1 & 6 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix} =/$
$31 * 24 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 5 & 1 & 3 & 7 & 8 & 4 \end{pmatrix} =/$	$32 * 24 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 2 & 3 & 8 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} =/$

$33 * I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 33$
$33 * 2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 4 & 8 & 6 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} =/$
$33 * 3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 8 & 7 & 2 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} =/$
$33 * 4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 7 & 3 & 1 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} =/$
$33 * 5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} = 26$
$33 * 6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 6 & 5 & 4 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} = 32$
$33 * 7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 29$
$33 * 8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 4 & 1 & 6 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix} =/$
$33 * 9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 1 & 2 & 7 & 8 & 4 & 3 \end{pmatrix} =/$
$33 * 10 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 2 & 3 & 8 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} =/$
$33 * 11 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 8 & 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} =/$
$33 * 12 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 6 & 2 & 4 & 8 & 5 & 1 \end{pmatrix} =/$
$33 * 13 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 1 & 5 & 7 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} /=$
$33 * 14 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 6 & 7 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} =/$
$33 * 15 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix} = 27$
$33 * 16 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 3 & 7 & 5 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix} = 31$
$33 * 17 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 7 & 6 & 5 & 8 \end{pmatrix} = 28$
$33 * 18 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 8 & 4 & 2 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix} = 30$
$33 * 19 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 5 & 6 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} =/$
$33 * 20 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 8 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix} =/$
$33 * 21 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix} = 25$
$33 * 22 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 5 & 1 & 3 & 7 & 8 & 4 \end{pmatrix} =/$
$33 * 23 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 6 & 1 & 4 & 8 & 5 \end{pmatrix} =/$
$33 * 24 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 5 & 8 & 3 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} =/$

*	I	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
I	I	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
2	2	3	4	I	13	20	16	11	22	17	23	5	19	10	8	21	24	7	12	9	18	6	15	14	30				31	29	25		
3	3	4	I	2	19	9	21	23	6	24	15	13	12	17	11	18	14	16	5	22	7	20	8	10	29				25	31	30		
4	4	I	2	3	12	22	18	15	20	14	8	19	5	24	23	7	10	21	13	6	16	9	11	17	31				30	25	29		
5	5	17	21	15	6	7	I	13	19	12	2	23	24	4	20	10	22	8	3	14	9	11	16	18		32			33			29	26
6	6	22	9	20	7	I	5	24	3	23	17	16	18	15	14	12	11	13	21	4	19	2	10	8		29			26			33	33
7	7	11	19	14	I	5	6	18	21	16	22	10	8	20	4	23	2	24	9	15	3	17	12	13		33			32				29
8	8	13	24	18	15	23	11	9	10	I	19	4	20	7	21	2	5	22	14	16	17	12	3	6		27	25	26					
9	9	20	6	22	21	3	19	10	I	8	14	18	16	11	17	13	15	12	7	2	5	4	24	23	26	25	28	27					
10	10	16	23	12	17	24	14	I	8	9	7	22	2	19	5	20	21	4	11	13	15	18	6	3	27	28	26	25					
11	11	19	14	7	8	15	23	22	17	2	12	I	9	16	18	3	13	6	10	21	24	5	4	20			30			32		27	
12	12	10	16	23	22	18	4	5	13	19	I	11	17	3	6	14	9	15	2	24	20	8	7	21			32			27		30	
13	13	24	18	8	20	16	2	19	12	5	3	15	14	I	9	17	6	11	4	10	22	23	21	7				32			28	31	
14	14	7	11	16	10	17	24	4	15	20	18	9	I	13	12	6	16	3	8	5	23	21	22	2				31			32	28	
15	15	5	17	21	23	11	8	20	14	4	13	3	6	18	16	I	12	9	24	7	10	19	2	22			31				33		27
16	16	23	12	10	2	13	20	7	18	21	6	17	11	9	I	15	3	14	22	8	4	24	5	19			33				27		31
17	17	21	15	5	24	14	10	2	11	22	16	6	3	12	13	9	18	I	23	19	8	7	20	4				30		33			28
18	18	8	13	24	4	12	22	21	16	7	9	14	15	6	3	11	I	17	20	23	2	10	19	5				34		28			30
19	19	13	7	11	9	21	3	12	5	13	4	8	10	2	22	24	20	23	I	17	6	15	18	16	32							25	
20	20	6	22	9	16	2	13	14	4	15	24	21	7	8	10	5	23	19	18	I	12	3	17	11		31					26		
21	21	15	5	17	3	19	9	16	7	18	20	24	23	22	2	8	4	10	6	11	I	14	13	12	33								25
22	22	9	20	6	18	4	12	17	2	11	10	7	21	23	24	19	8	5	16	3	13	I	14	15		30				26			
23	23	12	10	16	11	8	15	6	24	3	5	2	22	21	7	4	19	20	17	18	14	13	I	9			29		27				
24	24	18	8	13	14	10	17	3	23	6	21	20	4	5	19	22	7	2	15	12	11	16	9	I				29	28				
25	25	31	29	30				27	26	28									32		33				I	9	8	10	3	4	2	19	21
26	26				33	29	32	28	25	27										31		30			9	I	10	8	6	22	20	7	5
27	27							26	28	25	32	30			24	31							29		10	8	I	9	23	12	16	11	15
28	28							25	27	26			31	32			33	30						29	8	10	9	I	24	18	13	14	17
29	29	30	25	31	32	26	33																27	28	3	6	23	24	I	2	4	5	7
30	30	25	31	29							27	32					28	33				26			2	22	11	17	4	I	3	12	18
31	31	29	30	25									32	28	27	33				26					4	20	15	14	2	3	I	13	16
32	32				26	33	29				30	27	28	31					25						19	5	12	13	7	11	14	I	6
33	33				29	32	26								31	27	30	28			25				21	7	16	18	5	17	15	6	I

Tenint en compte els resultats obtinguts de l'operació de matrius dels moviments giratoris i de les simetries, he elaborat la següent taula on es pot comprovar que hi haurà composicions que formaran conjunts tancats però d'altres que no els serà possible.

A continuació he elaborat una petita llegenda per poder fer una bona lectura de la taula
Lectura gràfica de la taula anterior:

<table>
<tr><td>*</td><td>I</td><td>...</td><td>24</td><td>25</td><td>...</td><td>33</td></tr>
<tr><td>I
...
24</td><td colspan="3">GIRS</td><td colspan="3">SIMETRIES*GIRS</td></tr>
<tr><td>25
...
33</td><td colspan="3">GIRS*SIMETRIES</td><td colspan="3">SIMETRIES</td></tr>
</table>

Les conclusions que esmentaré seguidament es dividiran en dues parts:

1. **Formen o no grup tancat:**

   En observar la taula de la composició de moviments giratoris i simetries de les operacions entre tots els possibles moviments d'un cub que el deixen invariable, he vist que, queden espais buits. Aquests espais corresponen a variacions no estudiades, que impedeixen l'obtenció d'un conjunt tancat.

   Al no obtenir tota la taula completa numèricament parlant, no puc dir que tot el conjunt de moviments que deixen un cub invariable, formen un conjunt tancant.

   Fent una lectura ràpida de la taula i com a hipòtesi inicial, creia que obtindria els següents resultats: part de color rosa i blau forma un conjunt tancat, part de color verd i groc formen un conjunt no tancat. Però un cop fetes totes les operacions anteriors i fent un anàlisi més complet de la taula, m'adono que la hipòtesi inicial no es pot verificar ja que únicament es pot considerar com a grup tancat, la part de color rosa, mentre que la verda, la blava i la groga, son grups no tancats.

   Cal tenir en compte que seria de fàcil confusió fer una observació de la zona blava, i creure que forma un conjunt tancat pel sol fet que tots els requadres queden omplerts. Però com bé s'ha detallat en l'apartat de composició de Simetries, queda demostrat que no forma un conjunt tancat.

2. Relacions numèriques que s'estableixen dins la taula:

Inicialment no m'havia plantejat que pogués haver-hi una relació entre els resultats numèrics de la taula. Tot i que mentre feia l'anàlisi dels resultats, em vaig adonar que, mínimament, la taula segueix una certa organització. Aquesta organització està estructurada en subgrups molt reduïts, els resultats dels quals oscil·len entre intervals poc separats.

5. ESTRUCTURES ALGEBRAIQUES

Una estructura algebraica és un conjunt d'elements amb unes propietats operacionals determinades. El que determina l'estructura algebraica d'un conjunt són les operacions matemàtiques que es poden realitzar amb els elements d'aquest i les propietats d'aquestes operacions.
Quan parlem dels elements del conjunt ens referim a cadascuna de les unitats del conjunt, és a dir, dels nombres que el formen. Per exemple: En el conjunt dels nombres naturals, els elements són 1, 2, 3, 4, 5, ... En el conjunt dels vectors del pla, els elements són: (2 , 3), (-5 , 1), (½ , -4), ... En el conjunt dels nombres d'un dau, els elements són 1, 2, 3, 4, 5 i 6. Aquest conjunt es pot definir per extensió de la manera: D = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }; i es pot definir per comprensió de la manera: $D = \{ x \in N : 1 \leq x \leq 6 \}$. En el meu cas, els elements serien cada moviment obtingut al moure un cub i obtenir-lo en la mateixa posició, encara que amb els vèrtexs canviats.

Donat un conjunt, es poden definir operacions amb els seus elements com poden ser la suma, la resta, el producte ...
Trobem que existeixen dos tipus d'operacions:

- Interna: quan s'opera entre elements del mateix conjunt. Aquesta operació es troba en la propietat de clausura ja que obliga a que el resultat de l'operació entre dos elements d'un mateix conjunt, es trobi dins el mateix conjunt.
- Externa: quan s'opera entre elements de diferents conjunts. Un exemple seria la multiplicació.

Segons les propietats que verifiquen aquestes operacions, s'obtenen diverses estructures algebraiques, entre altres:

- Estructura de grup
- Estructura d'anell
- Estructura de cos
- Estructura d'espai vectorial

5.1 ESTRUCTURA DE GRUP

Es diu que un conjunt, **G**, amb els seus respectius elements, que conté una llei interna o operació interna (*), té estructura de grup, si aquesta operació o llei posseeix les següents propietats:

- **Propietat de clausura:** diu que el resultat de l'operació interna entre dos elements del conjunt ha de donar com a resultat un element del mateix conjunt.
  $x * y \in G \quad \forall x, y \in G$
- **Propietat associativa:** expressa que el resultat serà invariable independentment de la manera en què operem.
  $(x * y) * z = x * (y * z) \quad \forall x, y, z \in G$
- **Propietat de l'existència de l'element neutre:** obliga l'existència d'un element, **e,** en el conjunt que operat tant per la dreta com per

l'esquerra amb un element qualsevol del conjunt, obtindrem aquest mateix element.
$\exists\, \mathbf{e} \in \mathbf{G} : \quad x * \mathbf{e} = \mathbf{e} * x = x \quad \forall\, x \in \mathbf{G}$

- **Propietat de l'existència de l'element simètric:** obliga l'existència d'un element, $\mathbf{x^{-1}}$, que sigui l'invers d'un altre del conjunt i que, operats per qualsevol costat, donin com a resultat l'element neutre.
  $\exists\, \mathbf{x^{-1}} \in \mathbf{G} : \quad x * \mathbf{x^{-1}} = \mathbf{x^{-1}} * x = e \quad \forall\, x \in \mathbf{G}$

Si a més d'aquestes quatre propietats, també es compleix la propietat commutativa, es diu que el grup és commutatiu o abelià.
Aquesta propietat expressa que no importa l'ordre en què operis els dos elements ja que sempre donarà el mateix resultat:
$x * y = y * x \quad \forall\, , y \in \mathbf{G}$

L'estructura de grup és una de les més simples ja que només cal que es verifiquin unes poques propietats.

A continuació estudiaré alguns conjunts amb les operacions bàsiques comprovant si es compleixen totes les propietats i tenen, per tant, una estructura de grup:

5.1.1 Primer exemple

Com a conjunt prendrem els Nombres Naturals (N) i com a operació interna, prendrem l'operació de sumar, i ho expressarem de la següent manera: (N,+).
Els passos que seguirem per a determinar si és una estructura de grup, serà comprovar si es verifiquen cadascuna de les propietats abans esmentades.

- **Propietat de clausura:** $x * y \in \mathbf{G} \quad \forall\, x , y \in \mathbf{G}$
  Exemples:
  3 + 4 = 7
  59 + 802 = 861
  900734 + 1 = 900735

  No té sentit fer la comprovació de tots els nombres naturals, donat que n'hi ha infinits i no acabaria mai.
  Però podem afirmar que es compleix aquesta propietat, ja que, evidentment, si sumem dos nombres naturals, sempre obtindrem un altre nombre natural.

- **Propietat associativa:** $(x * y) * z = x * (y * z) \quad \forall\, x, y, z \in \mathbf{G}$
  Utilitzarem alguns exemples, per tal de veure si es complirà o no es complirà, sempre intentant buscar aquell exemple, que pugui ser l'excepció, ja que amb una sola excepció en fem prou per falsar la propietat.
  Igual que en el cas anterior és impossible fer tots els exemples possibles ja que de nombres enters n'hi ha infinits, i és impossible demostrar infinits resultats.

Exemples:
(3 + 7) + 9 = 3 + (7 + 9) → 10 + 9 = 3 + 16 → 19 = 19
(25 + 46) + 80 = 25 + (46 + 80) → 71 + 80 = 25 + 126 → 151 = 151
(186 + 9) + 37 = 186 + (9 + 37) → 195 + 37 = 186 + 46 → 232 = 232

Podem afirmar que es verifica la propietat associativa de la suma de nombres naturals ja que sabem que, en sumar tres nombres naturals, sempre obtindrem el mateix resultat, tant si comencem a sumar per davant com per darrere.

- **Existència de l'element neutre:** $\exists\, \mathbf{e} \in \mathbf{G} : \quad x * \mathbf{e} = \mathbf{e} * x = x \quad \forall\, x \in \mathbf{G}$
  Per demostrar aquesta propietat hem de buscar un nombre natural que, sumat amb qualsevol altre nombre natural, ens doni aquest segon nombre natural.
  Per trobar-lo podem resoldre una equació de primer grau, utilitzant qualsevol número com a exemple, ja que ha de ser el mateix element neutre per a qualsevol nombre natural. Si anomenem **e** aquest element neutre, tenim:
  6 + **e** = 6
  e = 6 – 6
  e = 0
  Per tant aquest element neutre que busquem ha de ser e = 0, però això no és possible ja que 0 no pertany al conjunt dels nombres naturals (tot i que si que pertany al conjunt dels nombres enters).

  Com he comprovat, la tercera propietat no es compleix. Per tant puc afirmar que el conjunt dels nombres naturals, amb la operació suma habitual, no te estructura de grup perquè no compleix les quatre propietats d'una estructura de grup.

5.1.2 Segon exemple

El segon conjunt que agafarem per comprovar si es forma una estructura de grup, és el conjunt de Nombres Naturals, i en aquest cas, com a operació interna, agafarem la resta. Aquest conjunt s'expressa de la següent manera: (N,-)
Tal i com he fet en l'exemple anterior, comprovaré si les propietats es verifiquen en aquest cas

- **Propietat de clausura:** $x * y \in \mathbf{G} \quad \forall\, x, y \in \mathbf{G}$
  Exemples:
  4 – 8 = - 4
  853 – 96 = 757
  95 – 602 = - 507

  Els nombres naturals, són tots els números de l'1 a l'infinit, sempre positius i sense decimals. En aquest darrer exemple, hem obtingut, com a resultat, un nombre negatiu.

Això demostra que hi ha casos en què operant dos nombres del conjunt, no obtenim un altre número del mateix conjunt, i per tant la resta de nombres naturals, no és una operació interna.
Per això, haurem de dir que el conjunt (N,-), no forma una estructura de grup.

5.1.3 Tercer exemple

Un altre conjunt que podem prendre com exemple, és el conjunt dels Nombres Naturals, utilitzant com a operació interna, la divisió. Aquest conjunt l'expressarem de la següent manera: (N, :).
Igual que els altres dos exemples, aplicarem les propietats per tal d'intentar esbrinar si es tracta d'una estructura de grup o no. Anirem comprovant cada una de les quatre propietats que tal que pugui ser una estructura de grup.

- **Propietat de la clausura:** $x * y \in G \quad \forall x, y \in G$
  Exemples:
  $\frac{8}{2} = 4$

  $\frac{100}{10} = 10$

  $\frac{7}{5} = 1.4$

  En l'últim cas, podem veure que el resultat és un número decimal, i els números decimals, no pertanyen al conjunt dels nombres naturals.
  Per tant, el quocient de nombres naturals no és una operació interna i (N,:) no té estructura de grup.

Com es pot comprovar, no és fàcil trobar un conjunt que es pugui denominar com a estructura de grup, donat que les operacions han de verificar les propietats de clausura i complir les propietats necessàries.
En els tres casos anteriors, no hem pogut verificar les propietats i per tant no podem dir que son estructures de grup, ja que el conjunt que hem agafat, dels nombres naturals (N), és un conjunt que es pot considerar bastant limitat degut a que no conté ni nombres negatius ni el número zero.
Per això, intentaré trobar un conjunt que tingui estructura de grup, ampliant el conjunt dels nombres naturals a altres conjunts més grans.

5.1.4 Quart exemple

Prenem el conjunt dels Nombres enters (Z), amb la suma habitual. Ho expressem de la següent manera: (Z,+).
Procediré a fer la comprovació de les lleis per veure si en aquest cas es compleixen:

- **Propietat de la clausura:** $x * y \in \mathbb{Z} \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}$
  Com en els apartats anteriors, només expressaré alguns exemples degut a la infinitat de nombres enters que existeixen:
  Exemples:
  (-801) + 70 = (-731)
  (-634) + 10005 = 9371
  98 + 0 = 98

  Podem donar aquesta propietat com a comprovada, ja que la suma de dos nombres enters, sempre és un nombre enter.

- **Propietat associativa**: $(x * y) * z = x * (y * z) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{Z}$
  També en demostraré algun exemple ja que podrien ser infinits:
  (59 + 14) + 0 = 59 + (14 + 0) → 73 + 0 = 59 + 14 → 73 = 73
  (106 + 4) +(-8) = 106 + (4 +(-8)) → 110 +(-8) = 106 +(-4) → 102 = 102
  (2 + 8) + 567 = 2 + (8 + 567) → 10 + 567 = 2 + 575 → 577 = 577

  La segona llei o propietat la podem donar com a comprovada ja que sabem que, en sumar tres nombres enters, sempre obtindrem el mateix resultat, tant si comencem a sumar per un costat o per un altre.

- **Existència de l'element neutre:** $\exists\, \mathbf{e} \in \mathbb{Z} : \quad x * \mathbf{e} = \mathbf{e} * x = x \quad \forall x \in \mathbb{Z}$
  Per trobar l'element neutre podem resoldre una equació de primer grau utilitzant qualsevol nombre enter com exemple, ja que l'element neutre ha de ser el mateix per a qualsevol dels elements del conjunt. Si anomenem **e** aquest element neutre tenim:
  Exemples:
  52 + **e** = 52
  52 – 52 = **e**
  e = 0
  En aquest cas ens dona que l'element neutre és el zero, que pertany dins el conjunt dels nombres enters. Aquest pertany dins el grup que s'està estudiant i podem dir que es verifica la propietat.

- **Existència de l'element simètric:** $\exists\, \mathbf{x^{-1}} \in \mathbb{G}: x * \mathbf{x^{-1}} = \mathbf{x^{-1}} * x = e \quad \forall x \in \mathbb{Z}$
  Per a demostrar aquesta propietat haurem de resoldre una equació de primer grau per a trobar l'element simètric, que l'anomenarem $\mathbf{x^{-1}}$:
  Exemples:
  $83 + x^{-1} = 0 \rightarrow x^{-1} = 0 - 83 \rightarrow x^{-1} = -83$
  $0 + x^{-1} = 0 \rightarrow x^{-1} = 0 - 0 \rightarrow x^{-1} = 0$
  $(-4100) + x^{-1} = 0 \rightarrow x^{-1} = 0 - (-4100) \rightarrow x^{-1} = 4100$
  Així doncs, novament, demostro que es verifica la propietat.

Hem pogut demostrar que es compleixen totes les propietats en el conjunt (Z,+). Per tant ja dius que, en aquest cas, es tracta d'una estructura de grup.

Finalment procedirem a comprovar si es compleix la cinquena propietat que ens demostraria que, a més de tractar-se d'una estructura de grup, es tracta d'un Grup Commutatiu o Abelià.

- **Propietat commutativa:** $x * y = y * x \quad \forall , y \in \mathbf{Z}$
  Exemples:
  7 + 15 = 15 + 7 → 22 = 22
  12 + (-6) = (-6) + 12 → 6 = 6
  0 + 93 = 93 + 0 → 93 = 93

  Aquesta propietat la podem donar com a comprovada ja que arribat en aquest punt, i analitzant els resultats, els podem donar com a vàlids i podem dir que la cinquena propietat es compleix.

Per tant, podem afirmar que el conjunt (Z,+) és un Grup Commutatiu o Abelià.

5.2 ESTRUCUTRA D'ANELL

Una altra de les estructures algebraiques és l'estructura d'anell.
Per tenir una estructura d'anell, a un grup abelià **A** (en aquest cas s'anomena additiu) li afegim una segona llei, anomenada multiplicació. Aquesta és tancada, associativa i distributiva respecte la primera llei.
És a dir: el conjunt A té estructura d'anell si conté les operacions internes de la suma (+) i la multiplicació (·) amb les següents propietats:

Propietats de l'addició: (són les mateixes propietats que l'estructura de grup)

- **Propietat de la clausura:**
  $x + y \in \mathbf{A} \quad \forall x , y \in \mathbf{A}$
- **Propietat associativa:**
  $(x + y) + z = x + (y + z) \quad \forall x, y, z \in \mathbf{A}$
- **Propietat de l'existència del zero:**
  $x + \mathbf{0} = \mathbf{0} + x = x \quad \forall x, 0 \in \mathbf{A}$
- **Propietat de l'existència de l'oposat:**
  $x + \mathbf{(-x)} = \mathbf{(-x)} + x = 0 \quad \forall$ -x, x, $0 \in \mathbf{A}$
- **Propietat de commutativa:**
  $x + y = y + x \quad \forall x, y \in \mathbf{A}$

Propietats de la multiplicació: (segona operació interna del conjunt)

- **Propietat de la clausura:**
  $x \cdot y \in \mathbf{A} \quad \forall x , y \in \mathbf{A}$
- **Propietat associativa:**
  $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \quad \forall x, y, z \in \mathbf{A}$

La propietat distributiva, és la última propietat que es necessita per determinar una estructura d'anell. Aquesta propietat lliga la primera i la segona operació interna de tal manera que expressa que la multiplicació per dos

nombres sumats és el mateix que multiplicar aquest nombre pel primer i després sumar la multiplicació d'aquest pel segon:

$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \forall\, x, y, z \in \mathbf{A}$

$(y \cdot z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x \quad \forall\, x, y, z \in \mathbf{A}$

Si, a més, es verifiquen altres propietats (de la multiplicació), existeixen altres tipus d'estructures d'anell:

- **Propietat de l'existència de la unitat:** és similar a la propietat de l'existència de l'element neutre, que consisteix en obtenir el mateix element multiplicant-lo per la unitat (**1**).
  $x \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} \cdot x = x \quad \forall\, x, 0 \in \mathbf{A}$
- **Propietat commutativa:**
  $x \cdot y = y \cdot x \quad \forall\, x, y \in \mathbf{A}$

Direm que si en una estructura d'anell es verifica la propietat de l'existència de la unitat del producte, aquest conjunt A és un anell unitari.
En el cas en què aquest conjunt **A** compleixi la propietat commutativa però no la propietat de l'existència de la unitat, direm que es tracta d'un anell commutatiu.
I finalment, si tenim un conjunt A, el qual es verifiquin tant la propietat de l'existència de la unitat com la propietat commutativa del producte, direm que el conjunt **A** és un anell unitari i commutatiu.

5.2.1 Primer exemple

A continuació estudiaré un conjunt per tal de comprovar si es tracta d'una estructura d'anell i de quin tipus és: anell unitari, anell commutatiu o anell unitari i commutatiu.
Així doncs, agafaré el conjunt dels nombres parells.
Cal recordar que es impossible expressar tots els exemples que existeixen ja que hi ha un nombre infinit de parells i, per tant, en posaré algun per tal d'intentar trobar l'excepció que falsa la propietat.

Primer de tot caldrà comprovar que el conjunt dels nombres parells (considerant que el 0 i els nombres -2, -4, -6, -8 ... són nombres parells), forma un grup abelià a partir de les propietats corresponents:

- **Propietat de la clausura:** $x + y \in \mathbf{A} \quad \forall\, x, y \in \mathbf{A}$
  Exemples:
  2 + 8 = 10
  9532 + 930 = 10462
  906 + 0 = 906
  Es verifica, ja que la suma de dos nombres parells, sempre és un nombre parell.

- **Propietat associativa:** $(x + y) + z = x + (y + z) \quad \forall\, x, y, z \in \mathbf{A}$
  Exemples:
  (4 + 10) + 2 = 4 + (10 + 2) → 14 + 2 = 4 + 12 → 16 = 16

(56 + 0) + 28 = 56 + (0 + 28) → 56 + 28 = 56 + 28 → 74 = 74
(102 + 4) + 8 = 102 + (4 + 8) → 106 + 8 = 102 + 12 → 114 = 114

Es verifica, ja que en sumar tres nombres parells, sempre obtindrem el mateix resultat, tant si ho fem d'una manera com d'una altra.

- **Propietat de l'existència del zero:** $x + 0 = 0 + x = x \quad \forall\, x, 0 \in \mathbf{A}$
  Exemples:
  58 + 0 = 0 + 58 = 58
  (- 904) + 0 = 0 + (- 904) = (- 904)
  7720 + 0 = 0 + 7720 = 7720

  Es verifica ja que, sumant zero a qualsevol nombre parell, sempre obtindrem el mateix nombre parell.

- **Propietat de l'existència de l'oposat:** $x + (-x) = (-x) + x = 0 \quad \forall$ -x,x,0∈**A**
  Exemples:
  8 + (-x) = 0 → -x = -8
  (- 90604) + (-x) = 0 → -x = 90604
  36 + (-x) = 0 → -x = -36

  Es verifica ja que, donat un nombre parell, sempre podem trobar el seu oposat canviant-lo de signe.

- Propietat de commutativa: $x + y = y + x \quad \forall\, x, y \in \mathbf{A}$
  Exemples:
  80 + 2 = 2 + 80 → 82 = 82
  9016 + 24 = 24 + 9016 → 9040 = 9040
  222 + (-98) = (-98) + 222 → 124 = 124

Hem comprovat que es verifiquen totes les propietats anteriors, per tant puc afirmar que el conjunt de nombres parells formen un grup Abelià.
Seguidament cal verificar si es compleixen les lleis de la multiplicació:

- **Propietat de la clausura:** $x \cdot y \in \mathbf{A} \quad \forall\, x, y \in \mathbf{A}$
  Exemples:
  2 · 46 = 92
  (-100) · 8 = -800
  1068 · 52 = 55536

  Es verifica ja que la multiplicació de dos nombres parells sempre dona un nombre parell.

- **Propietat associativa:** $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \quad \forall\, x, y, z \in \mathbf{A}$
  Exemples:
  (2 · 6) · 10 = 2 · (6 · 10) → 12 · 10 = 2 · 60 → 120 = 120
  (92·-84) · 8=92 · (-84 · 8) → -7728 · 8 = 92 · -672 → -61824 = -61824
  (0 · 24) · 14 = 0 · (24 · 14) → 0 · 14 = 0 · 336 → 0 = 0

- **Propietat distributiva:** $(\forall x)\,(\forall y)\,(\forall z)$: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
  Exemples:
  $4 \cdot (10 + 18) = 4 \cdot 10 + 4 \cdot 18 \rightarrow 4 \cdot 28 = 40 + 72 \rightarrow 112 = 112$
  $0 \cdot (104 + 6) = 0 \cdot 104 + 0 \cdot 6 \rightarrow 0 \cdot 110 = 0 + 0 \rightarrow 0 = 0$
  $12 \cdot (2 + 4) = 12 \cdot 2 + 12 \cdot 4 \rightarrow 12 \cdot 6 = 24 + 48 \rightarrow 72 = 72$

Donat que les propietats de la multiplicació, segona operació interna, també es verifiquen, es pot afirmar que el conjunt de nombres parells és una estructura d'anell.
El que no podem determinar encara, és de quin tipus d'estructura d'anell es tracta, ja que caldrà veure quina de les dues propietats (existència de la unitat i commutabilitat) es verifica i quina es refuta, o si es verifiquen les dues:

- **Propietat de l'existència de la unitat:** $x \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} \cdot x = x \quad \forall x, 1 \in \mathbf{A}$
  És fàcil veure en aquest cas, que la llei no es podrà verificar, ja que l'1 és un nombre senar, i el nostre conjunt és de nombres parells i, per tant, l'1 no forma part del conjunt. D'aquesta manera no podrem dir que aquest conjunt es verifica la propietat de l'existència de la unitat i conseqüentment no podrem dir que es tracti d'un anell unitari.

- **Propietat commutativa:** $x \cdot y = y \cdot x \quad \forall x, y \in \mathbf{A}$
  Exemples
  $6 \cdot 82 = 82 \cdot 6 \rightarrow 492 = 492$
  $90058 \cdot 0 = 0 \cdot 90058 \rightarrow 0 = 0$
  $(-36) \cdot 2 = 2 \cdot (-36) \rightarrow -72 = -72$

  Es verifica ja que a l'hora de multiplicar dos nombres parells, no importa l'ordre en què els operis ja que ens donarà el mateix resultat.

Per tant, podem afirmar que el conjunt dels nombres parells és un anell commutatiu però no unitari ja que no es verifica la propietat de l'existència de l'element unitari per a la multiplicació.

5.3 ESTRUCUTA DE COS

S'anomena cos commutatiu a tots aquells anells **K** els elements dels quals formen un grup abelià respecte la multiplicació. És a dir, el conjunt **K** té estructura de cos commutatiu si aquest conjunt està composat per les lleis internes + i ·, i aquestes tenen les propietats següents:

Propietats de l'adició: (aquestes propietats són les mateixes que les d'estructura d'anell)

- **Propietat de la clausura:**
  $x + y \in \mathbf{K} \quad \forall x, y \in \mathbf{K}$
- **Propietat associativa:**
  $(x + y) + z = x + (y + z) \quad \forall x, y, z \in \mathbf{K}$
- **Propietat de l'existència del zero.**
  $x + \mathbf{0} = \mathbf{0} + x = x \quad \forall x, 0 \in \mathbf{K}$

- **Propietat de l'existència de l'oposat:**
  $x + (-x) = (-x) + x = 0 \quad \forall\, -x, x, 0 \in \mathbf{K}$
- **Propietat commutativa:**
  $x + y = y + x \quad \forall\, x, y \in \mathbf{K}$

És imprescindible que totes aquestes propietats es verifiquin ja que si no fos així, ja no es partiria d'un grup abelià i per tant ja no podríem arribar a dir que tenim una estructura de cos commutatiu.

Per altra banda, també és indispensable que compleixi totes les propietats de la multiplicació, que són les mateixes que en el cas de l'estructura d'anell. Però en l'estructura de cos, cal que es compleixin la propietat commutativa i la propietat de l'existència de la unitat. També s'ha de verificar la propietat de l'existència de l'oposat per la multiplicació: Aquestes propietats son les següents:

- **Propietat de la clausura:**
  $x \cdot y \in \mathbf{K} \quad \forall\, x, y \in \mathbf{K}$
- **Propietat associativa:**
  $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \quad \forall\, x, y, z \in \mathbf{K}$
- **Propietat commutativa:**
  $x \cdot y = y \cdot x \quad \forall\, x, y \in \mathbf{K}$
- **Propietat de l'existència de la unitat:**
  $x \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} \cdot x = x \quad \forall\, x, 1 \in \mathbf{K}$
- **Propietat de l'existència de l'invers:** Molt semblant a la propietat de l'existència del simètric en les estructures de grup. La única cosa que canvia és que en aquesta propietat, l'operació és una multiplicació. L'element invers es representa $\mathbf{x^{-1}}$**:**
  $x \cdot \mathbf{x^{-1}} = \mathbf{x^{-1}} \cdot x = 1 \quad \forall\, x, x \neq 0 \in \mathbf{K}$ i $\exists\, x^{-1} \in \mathbf{K}$

No ens hem d'oblidar de la propietat que relaciona les dues lleis. Aquesta propietat és la **propietat distributiva**, i els anells també la tenen aquesta propietat:
$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \forall\, x, y, z \in \mathbf{K}$
$(y \cdot z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x \quad \forall\, x, y, z \in \mathbf{K}$

En el cas que el conjunt **K** compleixi totes les propietats anteriors llevat de la propietat commutativa respecte la multiplicació, direm que el conjunt **K** simplement forma una estructura de cos.
Si el conjunt **K** compleix totes les propietats esmentades anteriorment, podrem dir que el conjunt **K** forma una estructura de cos commutatiu.

5.3.1 Primer exemple

Com a exemple, estudiaré si el conjunt dels nombres racionals, **Q,** té estructura de cos o no.

Anem a comprovar si compleix les propietats:
Començaré per les propietats de l'addició o grup abelià:

- **Propietat de la clausura:** $x + y \in \mathbb{Q} \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}$
  Exemples:
  3.5 + 14 = 17.5
  (-9067) + 58.639 = 49572
  0.1502 + 90.2= 90.3502

  Es verifica, ja que la suma de dos nombres racionals, sempre dona un nombre racional.

- **Propietat associativa:** $(x + y) + z = x + (y + z) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{Q}$
  Exemples:
  (18 + 3) + 81 = 18 + (3 + 81) → 21 + 81 = 18 + 84 → 102 = 102
  (1.1+ 0.5) + 7 = 1.1 + (0.5 + 7) → 1.6 + 7 = 1.1 + 7.5 → 8.6 = 8.6
  (2 + 0.8) + 3 = 2 + (0.8 + 3) → 2.8 + 3 = 2 + 3.8 → 5.8 = 5.8

  Es verifica, ja que en sumar tres nombres racionals, sempre obtindrem el mateix resultat, tant si ho fem d'una manera com d'una altra.

- **Propietat de l'existència del zero:** $x + 0 = 0 + x = x \quad \forall x, 0 \in \mathbb{Q}$
  Exemples:
  16890.05 + 0 = 16890.05
  5/2+ 0 = 5/2
  (-73) + 0 = (-73)

  Es verifica ja que, sumant zero a qualsevol nombre racional, sempre obtindrem el mateix nombre racional.

- **Propietat de l'existència de l'oposat:** $x+(-x)=(-x)+x=0 \quad \forall -x, x, 0 \in \mathbb{Q}$
  Exemples:
  15.69 + (-x) = 0 → -x = -15.69
  7000 + (-x) = 0 → -x = -7000
  (-9463.008) + (-x) = 0 → -x = 9463.008

  Es verifica ja que, donat un nombre racional, sempre podem trobar el seu oposat canviant-lo de signe.

- **Propietat commutativa:** $x + y = y + x \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}$
  Exemples:
  16.4 + 9 = 9 + 16.4 → 25.4 = 25.4
  960 + 80.3 = 80.3 + 960 → 1040.3 = 1040.3
  6598.056 + (-1) = (-1) + 6598.056 → 6597.056 = 6597.056

  Es verifica ja que, al sumar dos nombres racionals, en cap cas importa l'ordre en què els operis.

Per tant el conjunt **Q** dels nombres racionals, és un grup abelià.
Comprovem ara si es compleixen o no les propietats de la multiplicació. En aquesta part, també comprovaré si la propietat commutativa es compleix. En cas afirmatiu podré dir que es tracta d'una estructura de cos commutatiu. Si no

es verifica la propietat commutativa, es tractarà simplement d'una estructura de cos. Tot i que encara faltarà comprovar la propietat distributiva que relaciona les dues lleis: suma i multiplicació.

- **Propietat de la clausura:** $x \cdot y \in \mathbb{Q} \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}$
  Exemples:
  52.6 · (-15) = (-789)
  96 · 0.28 = 26.88
  17 · 524.1 = 8909.7

  Es verifica ja que, al multiplicar dos nombres racionals, sempre obtindrem un altre nombre racional.

- **Propietat associativa:** $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{Q}$
  Exemples:
  (4 · 0.2) · 14 = 4 · (0.2 · 14) → 0.8 · 14 = 4 · 2.8 = 11.2 = 11.2
  (0 · 5) · 8.6 = 0 · (5 · 8.6) → 0 · 8.6 = 0 · 43 → 0 = 0
  (17 · 1) · 5.1 = 17 · (1 · 5.1) → 17 · 5.1 = 17 · 5.1 → 86.7 = 86.7

  Es verifica ja que, en multiplicar tres nombres racionals, sempre obtindrem el mateix resultat, tant si comencem operant per un costat com per l'altre.

- **Propietat commutativa:** $x \cdot y = y \cdot x \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}$
  Exemples:
  15/2 · 98 = 78 · 15/2 → 735 = 735
  0.16 · 100 = 100 · 0.16 → 16 = 16
  3054 · 8 = 8 · 3054 → 24432 = 24432

  Es verifica, ja que no importa l'ordre en què multipliquem els dos nombres racionals ja que sempre obtindrem el mateix resultat, que també serà un nombre racional.

- **Propietat de l'existència de la unitat:** $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x \quad \forall x, 1 \in \mathbb{Q}$
  Exemples:
  90.58 · 1 = 90.58
  (-309987) · 1 = (-309987)
  0.5904 · 1 = 0.5904

  Es verifica ja que, multiplicant 1 a qualsevol nombre racional, sempre obtindrem el mateix nombre racional.

- **Propietat de l'existència de l'invers:** $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1 \quad \forall x, x \neq 0 \in \mathbb{K} \text{ i } \exists x^{-1} \in \mathbb{K}$
  Exemples:
  5.06 · x^{-1} = 1 → x^{-1} = 1 / 5.06 → x^{-1} = 50 / 253
  2 · x^{-1} = 1 → x^{-1} = 1 / 2 → x^{-1} = 0.5
  8.2 · x^{-1} = 1 → x^{-1} = 1 / 8.2 → x^{-1} = 5 / 41

  Es verifica ja que tots els nombres racionals, tenen el seu invers.

Donat que totes les propietats es compleixen, fins i tot la propietat commutativa, si es compleix finalment la última propietat, que és la distributiva, podrem dir que el conjunt **Q** dels nombres racionals, forma una estructura de cos commutatiu.
En efecte:

- **Propietat distributiva**: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \forall\, x, y, z \in \mathbf{Q}$
  Exemples:
  $8 \cdot (0.2 + 7) = 8 \cdot 0.2 + 8 \cdot 7 \rightarrow 8 \cdot 7.2 = 1.6 + 56 \rightarrow 57.6 = 57.6$
  $3 \cdot (9.1 + 5) = 3 \cdot 9.1 + 3 \cdot 5 \rightarrow 3 \cdot 14.1 = 27.3 + 15 \rightarrow 42.3 = 42.3$
  $0 \cdot (15 + 1.1) = 0 \cdot 15 + 0 \cdot 1.1 \rightarrow 0 \cdot 16.1 = 0 + 0 \rightarrow 0 = 0$

Finalment, podem afirmar que el conjunt **Q** dels nombres racionals te estructura de cos commutatiu perquè compleix totes i cada una de les propietats necessàries.

5.4 ESTRUCTURA D'ESPAI VECTORIAL

Prenem **E ≡** {V, V', V'', ...}, com un conjunt que tindrà estructura de grup additiu abelià i suposem que es compleix una igualtat entre els seus elements. Prenem **K ≡** { α, β, γ, ...} com a un altre conjunt amb estructura de cos.
Si apliquem una llei de composició externa al conjunt **E** que faci correspondre un element del conjunt E amb un del conjunt K, per parelles, (α,V), direm que el conjunt **E** forma una estructura d'espai vectorial, és a dir, que el conjunt **E** és un espai vectorial sobre el cos **K**.
Els elements que formen el conjunt **E** s'anomenen vectors.

Degut a que aquest tipus d'estructura algebraica és molt complexa i necessita complir moltes lleis o propietats, es divideixen les propietats per blocs depenent del conjunt, grup o llei al qual s'apliquen.

El primer bloc pertany a les propietats del grup additiu abelià del conjunt **E**:

- **Propietat de clausura:**
  $V + V' \in \mathbf{E} \quad \forall\, V, V' \in \mathbf{E}$
- **Propietat associativa:**
  $(V + V') + V'' = V + (V' + V'') \quad \forall\, V, V', V'' \in \mathbf{E}$
- **Propietat commutativa:**
  $V + V' = V' + V \quad \forall\, V, V' \in \mathbf{E}$
- **Propietat de l'existència de l'element neutre:**
  $V + \mathbf{0} = \mathbf{0} + V = V \quad \forall\, V, \mathbf{0} \in \mathbf{E}$
- **Propietat de l'existència de l'element simètric:**
  $V + (\mathbf{-V}) = (\mathbf{-V}) + V = 0 \quad \forall\, V, (\mathbf{-V}) \in \mathbf{E}$

Les propietats del segon bloc són les que determinen l'estructura de cos del grup **K**:

Per començar trobem les propietats del grup abelià:

- **Propietat de la clausura:**
  $x + y \in \mathbf{K} \quad \forall\, x, y \in \mathbf{K}$

- **Propietat associativa:**
  $(x + y) + z = x + (y + z) \quad \forall\, x, y, z \in \mathbf{K}$
- **Propietat de l'existència del zero.**
  $x + \mathbf{0} = \mathbf{0} + x = x \quad \forall\, x, \mathbf{0} \in \mathbf{K}$
- **Propietat de l'existència de l'oposat:**
  $x + \mathbf{(-x)} = \mathbf{(-x)} + x = 0 \quad \forall\, x, (-\mathbf{x}) \in \mathbf{K}$
- **Propietat de commutativa:**
  $x + y = y + x \quad \forall\, x, y \in \mathbf{K}$

Seguidament trobem les propietats de la multiplicació:

- **Propietat de la clausura:**
  $x \cdot y \in \mathbf{K} \quad \forall\, x, y \in \mathbf{K}$
- **Propietat associativa:**
  $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \quad \forall\, x, y, z \in \mathbf{K}$
- **Propietat commutativa:**
  $x \cdot y = y \cdot x \quad \forall\, x, y \in \mathbf{K}$
- **Propietat de l'existència de la unitat:**
  $x \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} \cdot x = x \quad \forall\, x, \mathbf{1} \in \mathbf{K}$
- **Propietat de l'existència de l'invers:**
  $x \cdot \mathbf{x^{-1}} = \mathbf{x^{-1}} \cdot x = 1 \quad \forall\, x, x \neq 0 \in \mathbf{K}$ i $\exists x^{-1} \in \mathbf{K}$

I finalment la propietat que relaciona les dues lleis:

- **Propietat distributiva:**
  $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \forall\, x, y, z \in \mathbf{K}$
  $(y \cdot z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x \quad \forall\, x, y, z \in \mathbf{K}$

Com a tercer i últim bloc de propietats, trobem les que estan relacionades amb la llei externa, la multiplicació:

- **Propietat de clausura:**
  $\alpha \cdot V \in \mathbf{E} \quad \forall\, \alpha, V \in \mathbf{K}$
- **Propietat distributiva:**
  $\alpha \cdot (V + V') = \alpha \cdot V + \alpha \cdot V' \quad \forall\, \alpha, V, V' \in \mathbf{K}$
  $(\alpha \cdot \beta) \cdot V = \alpha \cdot V + \beta \cdot V \quad \forall\, \alpha, \beta, V \in \mathbf{K}$
- **Propietat associativa:**
  $(\alpha \cdot \beta) \cdot V = \alpha \cdot (\beta \cdot V) = \beta \cdot (\alpha \cdot V) \quad \forall\, \alpha, \beta, V \in \mathbf{K}$
- **L'element unitat de K és neutre:**
  $1 \cdot V = V \quad \forall\, V \in \mathbf{K}$

5.4.1 Primer exemple

De la mateixa manera que he fet amb les anteriors estructures algebraiques, intentaré buscar algun conjunt per veure si es tracta o no d'una estructura d'espai vectorial.
D'exemple prendré com a conjunt **E** els vectors d'un pla, i com a estructura de cos el conjunt **K** dels nombres reals. Finalment utilitzaré la multiplicació com a llei de composició externa.
Per comprovar si es tracta o no d'un espai vectorial comprovaré totes les propietats.

Començaré per mirar si el conjunt **E** es tracta d'un grup additiu abelià.

- **Propietat de clausura:** $V + V' \in \mathbf{E} \quad \forall V, V' \in \mathbf{E}$
  Exemples:
  (12 , 16) + (6 , 8) → (12+6 , 16+8) → (18 , 24)
  (3 , 4) + (9 , 12) → (3+9 , 4+12) → (12 , 16)
  (15 , 20) + (3 , 4) → (15+3 , 20+4) → (18 , 24)

  Es verifica ja que la suma de dos Vectors en el Pla, sempre dona com a resultat un altre Vector en el Pla.

- **Propietat associativa:** $(V + V') + V'' = V + (V' + V'') \quad \forall V, V', V'' \in \mathbf{E}$
  Exemples
  [(3 , 4)+(6 , 8)] + (9 , 12) = (3 , 4) + [(6 , 8)+(9 , 12)]
  (9 , 12) + (9 , 12) = (3 , 4) + (15 + 20)
  (18 , 24) = (18 , 24)
  [(6 , 8)+(6 , 8)] + (15 , 20) = (6 , 8) + [(6 , 8)+(15 , 20)]
  (12 , 16) + (15 , 20) = (6 , 8) + (21 + 28)
  (27 , 36) = (27 , 36)
  [(3 , 4)+(9 , 12)] + (12 , 16) = (3 , 4) + [(9 , 12)+(12 , 16)]
  (12 , 16) + (12 , 16) = (3 , 4) + (21 + 28)
  (24 , 32) = (24 , 32)

  Es verifica la propietat ja que no importa de la manera en què agrupem els Vectors en el Pla que operem, ja que sempre obtindrem el mateix resultat.

- **Propietat commutativa:** $V + V' = V' + V \quad \forall V, V' \in \mathbf{E}$
  Exemples:
  (3 , 4) + (12 , 16) = (12 , 16) + (3 , 4)
  (3+12 , 4+16) = (12+3 , 16+4)
  (15 , 20) = (15 , 20)
  (9 , 12) + (12 , 16) = (12 , 16) + (9 , 12)
  (9+12 , 12+16) = (12+9 , 16+12)
  (21 , 28) = (21 , 28)
  (6 , 8) + (15 , 20) = (6 , 8) + (15 , 20)
  (6+15 , 8+20) = (6+15 , 8+20)
  (21 , 28) = (21 , 28)

  Es verifica ja que tant si sumem dos Vectors en el Pla en un ordre, com si els sumem en un altre ordre, sempre obtindrem el mateix Vector en el Pla.

- **Propietat de l'existència de l'element neutre:** $V+\mathbf{0}=\mathbf{0}+V=V \ \forall V, \mathbf{0} \in \mathbf{E}$
  El buscaré a partir d'una equació de primer grau utilitzant un exemple. Aquest serà el mateix element neutre per a qualsevol element del conjunt.

Exemple:
(3 , 4) + **0** = **0** + (3 , 4) = (3 , 4)
(3+$\mathbf{0_a}$, 4+$\mathbf{0_b}$) = ($\mathbf{0_a}$+3 , $\mathbf{0_b}$+4) = (3 , 4)
0 = ($\mathbf{0_a}$,$\mathbf{0_b}$) = (0 , 0)

Es verifica la propietat ja que s'ha trobat el Vector en el Pla **0** = (0,0) com a element neutre del conjunt.

- **Propietat de l'existència de l'element simètric:**
$V+(\mathbf{-V})=(\mathbf{-V})+V=0 \ \forall V,(\mathbf{-V})\in\mathbf{E}$
Exemples:
$(6 , 8) + (\mathbf{-V}) = (\mathbf{-V}) + (3 , 4) = 0$
$(6 +(\mathbf{-V_a}) , 8+(\mathbf{V_b})) = ((\mathbf{-V_a})+6 , (\mathbf{-V_b})+ 8) = (0 , 0)$
$\mathbf{-V} = (\mathbf{-V_a} , \mathbf{-V_b}) = (-6 , -8)$
$(9 , 12) + (\mathbf{-V}) = (\mathbf{-V}) + (9 , 12) = 0$
$(9 +(\mathbf{-V_a}) , 12+(\mathbf{V_b})) = ((\mathbf{-V_a})+9 , (\mathbf{-V_b})+ 12) = (0 , 0)$
$\mathbf{-V} = (\mathbf{-V_a} , \mathbf{-V_b}) = (-9 , -12)$
$(15 , 20) + (\mathbf{-V}) = (\mathbf{-V}) + (15 , 20) = 0$
$(15 +(\mathbf{-V_a}) , 20+(\mathbf{V_b})) = ((\mathbf{-V_a})+15 , (\mathbf{-V_b})+20) = (0 , 0)$
$\mathbf{-V} = (\mathbf{-V_a} , \mathbf{-V_b}) = (-15 , -20) = 0$

Es verifica ja que el resultat, en tots els casos, és el mateix vector inicial en negatiu.

Analitzant els resultats obtinguts prèviament veig que totes les lleis anteriors que fan referència al conjunt E i ens demostren que es tracta d'un grup additiu Abelià, es compleixen.

El següent bloc de propietats que cal estudiar, fa referència al conjunt K. Per tant, caldrà comprovar si el conjunt que hem agafat en aquest cas, que es tracta del conjunt dels nombres reals, és un grup additiu abelià o té estructura de cos commutatiu.
Com que per comprovar-ho cal aplicar les mateixes propietats que les estructures de cos, prendrem els mateixos exemples ja que en aquest apartat el conjunt estudiat són els nombres reals. Mentre que en l'apartat anterior es van estudiar els nombres racionals que pertanyen dins els reals.

- **Propietat de la clausura:** $x + y \in \mathbf{K} \quad \forall\, x, y \in \mathbf{K}$
Exemples:
3.5 + 14 = 17.5
9067 + 58.639 = 9215.639
0.1502 + 90.2= 90.3502

Es verifica ja que la suma de dos nombres reals, sempre dona com a resultat un altre nombre real.

- **Propietat associativa:** $(x + y) + z = x + (y + z) \quad \forall\, x, y, z \in \mathbf{K}$
  Exemples:
  (18 + 3) + 81 = 18 + (3 + 81) → 21 + 81 = 18 + 84 → 102 = 102
  (1.1+ 0.5) + 7 = 1.1 + (0.5 + 7) → 1.6 + 7 = 1.1 + 7.5 → 8.6 = 8.6
  (2 + 0.8) + 3 = 2 + (0.8 + 3) → 2.8 + 3 = 2 + 3.8 → 5.8 = 5.8

  Es verifica la propietat ja que no importa de la manera que agrupem els nombres reals per sumar-los, ja que obtindrem el mateix resultat.

- **Propietat de l'existència del zero:** $x + \mathbf{0} = \mathbf{0} + x = x \quad \forall\, x, \mathbf{0} \in \mathbf{K}$
  Exemples:
  16890.05 + 0 = 16890.05
  2.5+ 0 = 2.5
  73 + 0 = 73

  Es verifica ja que en el conjunt dels nombres reals, pertany el número zero.

- **Propietat de l'existència de l'oposat:** $x+\mathbf{(-x)}=\mathbf{(-x)}+x = 0 \quad \forall\, x,(-\mathbf{x})\in\mathbf{K}$
  Exemples:
  15.69 + (-x) = 0 → -x = -15.69
  7000 + (-x) = 0 → -x = -7000
  (-9463.008) + (-x) = 0 → -x = 9463.008

  Es verifica ja que es pot comprovar com el resultat que representa l'element oposat, és l'element pres en negatiu.

- **Propietat de commutativa:** $x + y = y + x \quad \forall\, x, y \in \mathbf{K}$
  Exemples:
  16.4 + 9 = 9 + 16.4 → 25.4 = 25.4
  960 + 80.3 = 80.3 + 960 → 1040.3 = 1040.3
  6598.056 + 1 = 1 + 6598.056 → 6599.056 = 6599.056

  Es verifica ja que la suma de dos nombres reals, dona com a resultat un nombre real.

- **Propietat de la clausura:** $x \cdot y \in \mathbf{K} \quad \forall\, x, y \in \mathbf{K}$
  Exemples:
  52.6 · 15 = 789
  96 · 0.28 = 26.88
  17 · 524.1 = 8909.7

  Es verifica la propietat ja que sempre que es multipliquen dos nombres reals, s'obté com a resultat, un nombre real.

- **Propietat associativa:** $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \quad \forall\, x, y, z \in \mathbf{K}$
  Exemples:
  (4 · 0.2) · 14 = 4 · (0.2 · 14) → 0.8 · 14 = 4 · 2.8 = 11.2 = 11.2
  (0 · 5) · 8.6 = 0 · (5 · 8.6) → 0 · 8.6 = 0 · 43 → 0 = 0
  (17 · 1) · 5.1 = 17 · (1 · 5.1) → 17 · 5.1 = 17 · 5.1 → 86.7 = 86.7

- **Propietat commutativa:** $x \cdot y = y \cdot x \quad \forall x, y \in \mathbf{K}$
  Exemples:
  $7.5 \cdot 98 = 78 \cdot 7.5 \rightarrow 735 = 735$
  $0.16 \cdot 100 = 100 \cdot 0.16 \rightarrow 16 = 16$
  $3054 \cdot 8 = 8 \cdot 3054 \rightarrow 24432 = 24432$

  Es verifica ja que no importa l'ordre en què multipliquem dos nombres reals, ja que sempre s'obtindrà com a resultat un nombre real.

- **Propietat de l'existència de la unitat:** $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x \quad \forall x, 1 \in \mathbf{K}$
  Exemples:
  $90.58 \cdot 1 = 90.58$
  $309987 \cdot 1 = 309987$
  $0.5904 \cdot 1 = 0.5904$

  Es verifica la propietat, ja que en el conjunt dels nombres reals, pertany el número 1 i fa la funció de nombre unitari en la multiplicació.

- **Propietat de l'existència de l'invers:**
  $x \cdot \mathbf{x^{-1}} = \mathbf{x^{-1}} \cdot x = 1 \quad \forall x, x \neq 0 \in \mathbf{K}$ i $\exists x^{-1} \in \mathbf{K}$
  Exemples:
  $5.06 \cdot x^{-1} = 1 \rightarrow x^{-1} = 1 / 5.06 \rightarrow x^{-1} = 50 / 253$
  $2 \cdot x^{-1} = 1 \rightarrow x^{-1} = 1 / 2 \rightarrow x^{-1} = 0.5$
  $8.2 \cdot x^{-1} = 1 \rightarrow x^{-1} = 1 / 8.2 \rightarrow x^{-1} = 5 / 41$

  Es verifica ja que en cadascun dels exemples es pot comprovar el resultat.

- **Propietat distributiva:** $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \forall x, y, z \in \mathbf{K}$
  Exemples:
  $8 \cdot (0.2 + 7) = 8 \cdot 0.2 + 8 \cdot 7 \rightarrow 8 \cdot 7.2 = 1.6 + 56 \rightarrow 57.6 = 57.6$
  $3 \cdot (9.1 + 5) = 3 \cdot 9.1 + 3 \cdot 5 \rightarrow 3 \cdot 14.1 = 27.3 + 15 \rightarrow 42.3 = 42.3$
  $0 \cdot (15 + 1.1) = 0 \cdot 15 + 0 \cdot 1.1 \rightarrow 0 \cdot 16.1 = 0 + 0 \rightarrow 0 = 0$

  Es verifica la propietat ja que queda comprovada la propietat amb els tres exemples prenent com a conjunt els nombres reals.

Per acabar, serà necessari que es compleixin les propietats de la llei externa, la multiplicació.

- **Propietat de clausura:** $\alpha \cdot V \in \mathbf{E} \quad \forall \alpha, V \in \mathbf{K}$
  Exemples:
  $4 \cdot (3 , 4) = (4 \cdot 3 , 4 \cdot 4) = (12 , 16)$
  $2 \cdot (9 , 12) = (2 \cdot 9 , 2 \cdot 12) = (18 , 24)$
  $5 \cdot (6 , 8) = (5 \cdot 6 , 5 \cdot 8) = (30 , 40)$

  Es verifica la propietat ja que al multiplicar un nombre real per un Vector en el Pla, sempre obtindrem com a resultat, un altre Vector en el Pla.

- **Propietat distributiva:** $\alpha \cdot (V + V') = \alpha \cdot V + \alpha \cdot V' \quad \forall\, \alpha, V, V' \in \mathbf{K}$
  Exemples:
  2 · [(3 , 4) + (6 , 8)] = 2 · (3 , 4) + 2 · (6 , 8)
  2 · (9 , 12) = (6 , 8) + (12 , 16)
  (18 , 24) = (18 , 24)
  3 · [(3 , 4) + (9 , 12)] = 3 · (3 , 4) + 3 · (9 , 12)
  3 · (12 , 16) = (9 , 12) + (27 , 36)
  (36 , 48) = (36 , 48)
  5 · [(15 , 20) + (6 , 8)] = 5 · (15 , 20) + 5 · (6 , 8)
  5 · (21 , 28) = (75 , 100) + (30 , 40)
  (105 , 140) = (105 , 140)

  Es verifica la propietat ja que no importa la manera en què multipliquem el nombre real per la suma dels vectors, que sempre obtindrem el mateix Vector en el Pla.

- **Propietat associativa:** $(\alpha \cdot \beta) \cdot V = \alpha \cdot (\beta \cdot V) = \beta \cdot (\alpha \cdot V) \quad \forall\, \alpha, \beta, V \in \mathbf{K}$
  Exemples:
  (2 · 3) · (3 , 4) = 2 · [3 · (3 , 4)] = 3 · [2 · (3 , 4)]
  6 · (3 , 4) = 2 · (9 , 12) = 3 · (6 , 8)
  (18 , 24) = (18 , 24) = (18 , 24)
  (2 · 4) · (6 , 8) = 2 · [4 · (6 , 8)] = 4 · [2 · (6 , 8)]
  8 · (8 , 6) = 2 · (24 , 32) = 4 · (12 , 16)
  (64 , 48) = (48 , 64) = (48 , 64)
  (3 · 4) · (9 , 12) = 3 · [4 · (9 , 12)] = 4 · [3 · (9 , 12)]
  12 · (9 , 12) = 3 · (36 , 48) = 4 · (27 , 36)
  (108 , 144) = (108 , 144) = (108 , 144)

  Es verifica ja que no importa l'ordre que es segueixi per multiplicar dos nombres reals amb un Vector en el Pla, ja que sempre s'obtindrà el mateix Vector en el Pla.

- **L'element unitat de K és neutre:** $1 \cdot V = V \quad \forall\, V \in \mathbf{K}$
  Exemples:
  1 · (3 , 4) = (1·3 , 1·4) = (3 , 4)
  1 · (9 , 12) = (1·9 , 1·12) = (9 , 12)
  1 · (15 , 20) = (1·15 , 1·20) = (15 , 20)

  Es verifica ja que, el conjunt dels nombres reals conté l'element unitat, el número 1, que amb la multiplicació, actua com a element neutre.

Totes les propietats que s'han de complir perquè un conjunt sigui un espai vectorial, les he pogut comprovar. Per tant puc afirmar que el conjunt **E** dels vectors en el pla ha quedat estructurat com un espai vectorial sobre el cos **K** dels nombres reals.

Algun altre conjunt que podria servir com a exemple, és el conjunt dels Polinomis. També podria ser-ho el conjunt dels nombres complexos.

5.5 RESUM GENERAL DE ELS PROPIETATS DE LES ESTRUCTURES ALGEBRAIQUES

	Estructura de Grup	**Estructura d'Anell**	**Estructura de Cos**	**Estructura d'Espai Vectorial**
Expressió	(G , *)	(A , * , ·)	(K , + , ·)	(E , + , ·) sobre un cos K
Operacions	*: Operació interna	* : Operació interna · : Operació interna	+ : Operació interna · : Operació interna	+ : Operació interna · : Operació interna
Propietats	- De Clausura - Associativa - De l'Existència de l'Element Neutre - De l'Existència de l'Element Simètric → Commutativa Si, a més, es verifica la propietat Commutativa, aleshores es parla d'un Grup Abelià o Commutatiu.	Propietats de l'adició: - De Clausura - Associativa - De l'Existència del Zero - De l'Existència de l'Oposat - Commutativa Propietats de la multiplicació: - De Clausura - Associativa Propietats relacionades amb les dues operacions: - Distributiva → De l'Existència de la Unitat → Commutativa Si, a més, es verifica la propietat de l'Existència de la Unitat, aleshores es parla d'un Anell Unitari. Si, en contes de verificar-se la propietat de l'Existència de la Unitat es verifica la propietat commutativa, aleshores es parla d'un Anell Commutatiu. Si, es verifiquen les dues propietats esmentades anteriorment, es parla d'un Anell Unitari i Commutatiu.	Propietats de l'adició (suma): - De Clausura - Associativa - De l'Existència del Zero - De l'Existència de l'Oposat - Commutativa Propietats de la multiplicació: - De Clausura - Associativa - Commutativa - De l'Existència de la Unitat - De l'Existència de l'Invers Propietats relacionades amb els dues operacions: - Distributiva	Propietats del grup abelià E: - De Clausura - Associativa - De l'Existència de l'Element Neutre - De l'Existència de l'Element Simètric - Commutativa Propietats de l'estructura de cos K: *Propietats de l'adició (suma): - De Clausura - Associativa - De l'Existència del Zero - De l'Existència de l'Oposat - Commutativa *Propietats de la multiplicació: - De Clausura - Associativa - Commutativa - De l'Existència de la Unitat - De l'Existència de l *Propietats relacionades amb les dues operacions: - Distributiva Propietats de la multiplicació: - De Clausura - Distributiva - Associativa - L'Element Unitat de K és Neutre
Exemple	Conjunt dels Nombres Enters ($\mathbb{Z}$)	Conjunt dels Nombres Parells	Conjunt dels Nombres Racionals ($\mathbb{Q}$)	Conjunt dels Vectors en el Pla sobre els Nombres Reals ($\mathbb{R}$)

5.6 QUINA ESTRUCTURA ALGEBRAICA FORMA UN CUB?

En apartats anteriors he estudiat tots els possibles moviments dels vèrtexs d'un cub, que aparentment el deixen invariable.
Per una banda m'he adonat que hi ha 24 moviments, que són els que pertanyen al conjunt de moviments giratoris, que formen un conjunt tancat.
Per altra banda, el conjunt de 8 moviments simètrics, no formen un conjunt tancat.
Per tant,prendré el conjunt dels moviments giratoris, ja que és un conjunt tancat, i l'estudiaré per intentar trobar quina estructura algebraica forma.

Al conjunt dels moviments giratoris l'expressarem com a $\mathbf{M}$.

Coneixem quatre tipus d'estructura diferents, i es pot veure que totes parteixen de l'estructura de cos, per tant començaré per veure si forma estructura de cos i després aniré continuant amb l'estudi.
Per agilitzar tant la lectura com la comprovació, expressaré els moviments sempre amb la seva nomenclatura donada en el seu moment i realitzaré les comprovacions utilitzant la taula de la pàgina 62. D'aquesta manera, no caldrà fer cap tipus d'operació, sinó que simplement serà llegir la taula i expressar els resultats posteriorment.
Posaré cinc exemples en cada apartat per tal de que quedi demostrat si es compleix o no la llei.
En primer lloc, com he dit anteriorment, caldrà comprovar si es compleixen les propietats d'estructura de grup:

- **Propietat de la clausura:** $x * y \in \mathbf{M} \quad \forall x, y \in \mathbf{M}$

M2 * M8 = M13

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&1&4&8&6&2&3&7\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&3&4&1&6&7&8&5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&2&1&5&7&3&4&8\end{pmatrix}$$

M15 * M7 = M4

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&7&3&2&5&8&4&1\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\4&3&7&8&1&2&6&5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&6&7&3&1&5&8&4\end{pmatrix}$$

M23 * M11 = M4

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&8&7&6&1&4&3&2\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&4&8&5&2&3&7&6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&6&7&3&1&5&8&4\end{pmatrix}$$

M9 * M19 = M5

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&4&1&2&7&8&5&6\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&1&5&6&3&4&8&7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&6&2&1&8&7&3&4\end{pmatrix}$$

M 20 * M12 = M24

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&3&2&6&8&4&1&5\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&5&6&2&4&8&7&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&6&5&8&3&2&1&4\end{pmatrix}$$

Es verifica, ja que des de bon principi hem pres el conjunt sabent que era tancat, i per tant, que la propietat es verificava.

- **Propietat associativa:** $(x * y) * z = x * (y * z) \quad \forall x, y, z \in \mathbf{M}$
  (M3 * M7) * M10 = M3 * (M7 * M10)
  M19 * M10 = M3 * M14
  M11 = M11
  (M8 * M17) * M14 = M8 * (M17 * M14)
  M2 * M14 = M8 * M16
  M7 = M7
  (M13 * M9) * M16 = M13 * (M9 * M16)
  M16 * M16 = M13 * M18
  M15 = M15
  (M18 * M9) * M21 = M18 * (M9 * M21)
  M12 * M21 = M18 * M7
  M24 = M24
  (M23 * M2) * M24 = M23 * (M2 * M24)
  M15 * M24 = M23 * M18
  M19 = M19

  Es verifica, ja que no trobem cap cas que ens demostri el contrari.

- **Propietat de l'existència de l'element neutre:**
  $\exists\ \mathbf{e} \in \mathbf{M} : \ x * \mathbf{e} = \mathbf{e} * x = x \quad \forall x \in \mathbf{M}$
  M3 * I = I * M3 → M3 = M3
  M20 * I = I * M20 → M20 = M20
  M8 * I = I * M8 → M8 = M8
  M10 * I = I * M10 → M10 = M10
  M16 * I = I * M16 → M16 = M16

  Es verifica la propietat de l'existència de l'element neutre, ja que el conjunt de moviments giratoris, té l'element anomenat Identitat, que permet operar-lo amb un altre element del conjunt, i s'obtingui aquest element com a resultat.

- **Propietat de l'existència de l'element simètric:**
  $\exists\ \mathbf{x^{-1}} \in \mathbf{G} : \ x * \mathbf{x^{-1}} = \mathbf{x^{-1}} * x = e \quad \forall x \in \mathbf{G}$
  M12 * M11 = M12 * M11 = I
  M24 * M24 = I
  M17 * M18 = M18 * m17 = I
  M3 * M3 = I
  M19 * M19 = I

  Es verifica ja que tot moviment giratori del cub, té un element simètric que li permet, fent-los consecutivament, arribar a la posició d'Identitat.

Hem pogut demostrar que les quatre propietats es compleixen, per tant podem afirmar que es tracta d'una estructura de grup.

En segon lloc és necessari comprovar si es tracta d'un Grup Commutatiu o Abelià:

- **Propietat commutativa:** $x + y = y + x \quad \forall x, y \in \mathbf{M}$
  M7 + M23 ≠ M23 + M7 → M15 ≠ M12
  M20 + M11 ≠ M11 + M20 → M21 ≠ M24
  M13 + M4 ≠ M4 + M13 → M5 ≠ M8
  M9 + M13 ≠ M13 + M9 → M12 ≠ M16
  M14 + M10 ≠ M10 + M14 → M19 ≠ M20

  Queda demostrat clarament que la propietat commutativa no es compleix, ja que tot són desigualtats.

Al veure que la propietat commutativa no es compleix, no podrem dir que el conjunt de moviments giratoris que deixen el cub visiblement invariat, és un grup Abelià o Commutatiu. Però com les quatre propietats anteriors sí es compleixen, podem dir que es tracta d'una estructura de grup.

6. EL CUB EN L'ART I EN L'ARQUITECTURA

El cub, és un dels elements geomètrics més comuns en al nostra societat.

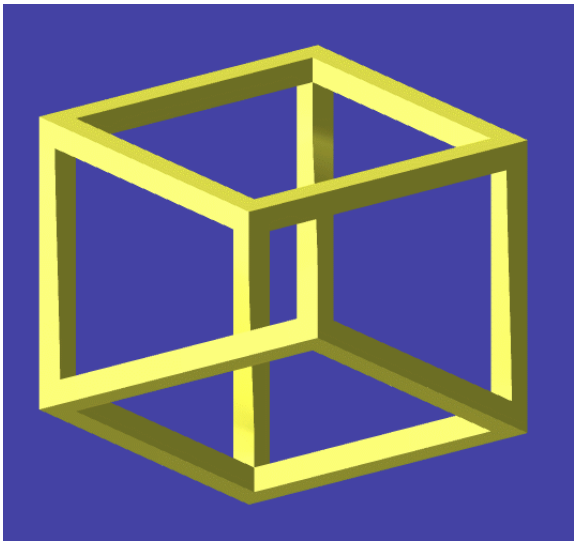
6.1 ART

En l'art, trobem el cubisme, que va ser un moviment artístic que es va desenvolupar entre el 1907 i el 1914. Va néixer a França propulsat per Pablo Picasso, Georges Braque i Juan Gris. Va ser una tendència essencial ja que va donar peu a la resta de *vanguardies* europees del segle XX. No es tracta d'un moviment artístic més, sinó que es tracta de la ruptura definitiva amb la pintura tradicional.
El cubisme és considerat la primera *vanguardia*, ja que va trencar amb l'últim estatut renaixentista a principis del segle XX: la perspectiva. En els quadres cubistes, desapareix la perspectiva tradicional, tracta les formes de la naturalesa mitjançant figures geomètriques, línies i superfícies. D'aquesta manera s'aconsegueix la perspectiva múltiple: es representen totes les parts d'un objecte en un mateix pla. Deixa d'existir un punt de vista únic, desapareix la sensació de profunditat, s'eliminen els detalls ... Una altra característica molt comuna del cubisme és que s'utilitzaven tons apagats com poden ser els tons grisosos, verds i marrons. Les obres resultants del cubisme són difícils d'entendre al no tenir un referent naturalista, d'aquesta manera, va iniciar una etapa en què, després d'una obra d'art, l'artista havia d'explicar el que representava la seva obra per tal de que el públic la pogués entendre.

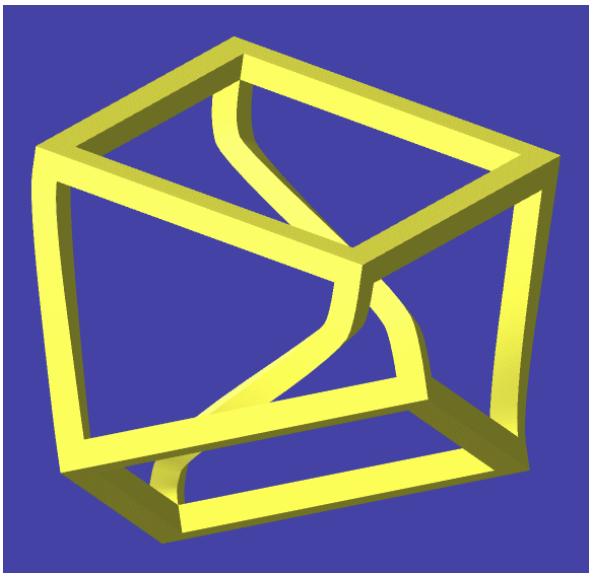
Arlequí, quadre del
cubisme de l'any 1915 de Pablo Picasso

Cases a Céret, quadre
cubista de Joan Gris de l'any 1913

Un altre autor reconegut, en aquest cas, pels seus gravats, litografies i il·lustracions a tinta és Maurits Cornelis Escher. Artista dels Països Baixos que representava construccions impossibles, exploracions de l'infinit i tessel·les.
Escher, el relaciono en el món de l'art i l'arquitectura del cub, ja que va inventar el cub d'Escher (The Escher's Cube), també conegut com el Cub Impossible. Se l'anomena impossible ja que, la perspectiva que hi dona, no lliga amb la forma que representa i sembla impossible de representar-lo en forma 3D, però és possible:



El cub impossible d'Escher



Representació a 3D del cub
impossible d'Escher vist d'un altre angle

Quan es parla del cub en el món arquitectònic, podem pensar que el cub és un element molt comú, però no tots els arquitectes pensen el mateix, i cada un es relaciona amb unes estructures i formes determinades.

6.2 ARQUITECTURA

Degut a al varietat a l'hora de treballar per part dels arquitectes, em vaig reunir amb un que actualment, està en fase de construcció d'un habitatge en forma de cub, i vaig aprofitar per fer-li una entrevista, que és la següent:

25/07/11

Entrevista a Arnau Vergés.
Assistents: Arnau Vergés i Ariadna Matabosch
Hora: 19:30.
Lloc: Estudi Artec.

Hola Arnau, em dic Ariadna Matabosch i he cursat 1r de Batxillerat. Durant aquests dos anys de batxillerat, s'elabora un treball de recerca i el meu està basat en l'estudi del Cub de Rubik. La primera part del treball consta en l'estudi matemàtic i anàlisi del cub com a figura geomètrica. Un punt que creia que no podia deixar de banda era si l'arquitectura actual, parteix en alguns casos, del cub. Així doncs t'agrairia si em poguessis respondre un seguit de preguntes donat que les teves obres solen seguir estructures geomètriques.

- **Quants anys fa que exerceixes la professió d'arquitecte?**
  Exerceixo d'arquitecte des del 2004.

- **Creus que tens un model característic amb el qual et bases per a les teves construccions?**
  Sóc molt racional amb la meva arquitectura, intentant que les formes no siguin lliures, amb formes compactes, quadre d'obertures, molt d'ordre i sempre tenint clar que si es surt d'aquest ordre, hi ha d'haver un motiu que ho demani

- **Quin és aquest model característic, a grans trets?**
  Les formes són rectes amb colors clars com el blanc i el gris. M'agrada contrastar el volum amb els colors.

- **Com intervenen les matemàtiques dins les teves construccions? Utilitzes formes geomètriques?**
  Bé, la veritat és que treballo sempre amb formes geomètriques com el cub i el prisma deixant de banda les formes trapezoïdals.
  Les matemàtiques intervenen per buscar proporcions en els edificis que dissenyo. Normalment utilitzo el quadrat o la proporció Àurea.

- **Tens algun projecte que es basa en l'estructura d'un cub? O en alguna altra construcció alguna part de l'estructura has partit d'un cub?**
  Hi ha un projecte que parteix del cub. Es tracta d'una casa de Sant Feliu de Pallerols. És un projecte on el més important és poder-hi viure i cobrir les necessitats.

- **Com s'anomena aquest projecte i de quin moviment parteix?**
  El nom que li he proporcionat és: Habitatge unifamiliar aïllat i mossegat.
  Parteix del moviment del cubisme. Representaria una poma mossegada on cadascuna d'elles mostra el seu interior traient la pell de la poma. És a dir, donant molta importància al contingut i no tant a l'exterior.

- **Com ha sorgit l'idea de basar-se en el cub?**
  La idea va sorgir donat que el client estava molt obert a qualsevol projecte, i després de moltes idees i proves, se'ns va acudir que el cub era una bona opció.
  El punt de partida, sempre, és buscar recursos per tal que sigui funcional. Aleshores ens vam adonar que el cub oferia totes aquestes opcions.

- **Quins inconvenients s'han trobat en la construcció d'aquesta casa?**
  El problema ha sigut l'alçada ja que implicaria una vivenda de tres plantes i els clients només volien una casa de dos pisos.

- **Fins a quin punt es manté la originalitat del cub en la construcció?**
  Les seves mides són de 11.50m x 11,50mx 8m. Per tant, no és un cub perfecte degut a la normativa. Ara bé, des de carrer, tot i ser una mica més baix, la impressió que dóna és d'un cub perfecte.

- **Ens podries explicar alguna característica de la vivenda?**
  Respecte als materials s'ha escollit fer-ho amb formigó donat que hi ha espais on seria necessari posar algun pilar i s'havia d'evitar. El formigó ens dóna molta consistència, no té manteniment, té un bon aspecte i ens dóna molta contundència i autenticitat.
  En quant a la orientació les habitacions estan orientades al nord mentre que la cuina i la sala d'estar estan orientades al sud. Degut a que el cub no és perfecte, dues de les cares les seves estructures es basen amb terços mentre que les altres dues cares es basen en meitats.

- **Què és prioritari, la comoditat de la vivenda o l'estètica?**
  La casa del cub pot semblar molt abstracte, conceptual i poc funcional però està dissenyada per tal que sigui tot al contrari, permetent donar llum a qualsevol dels punts de la llar.

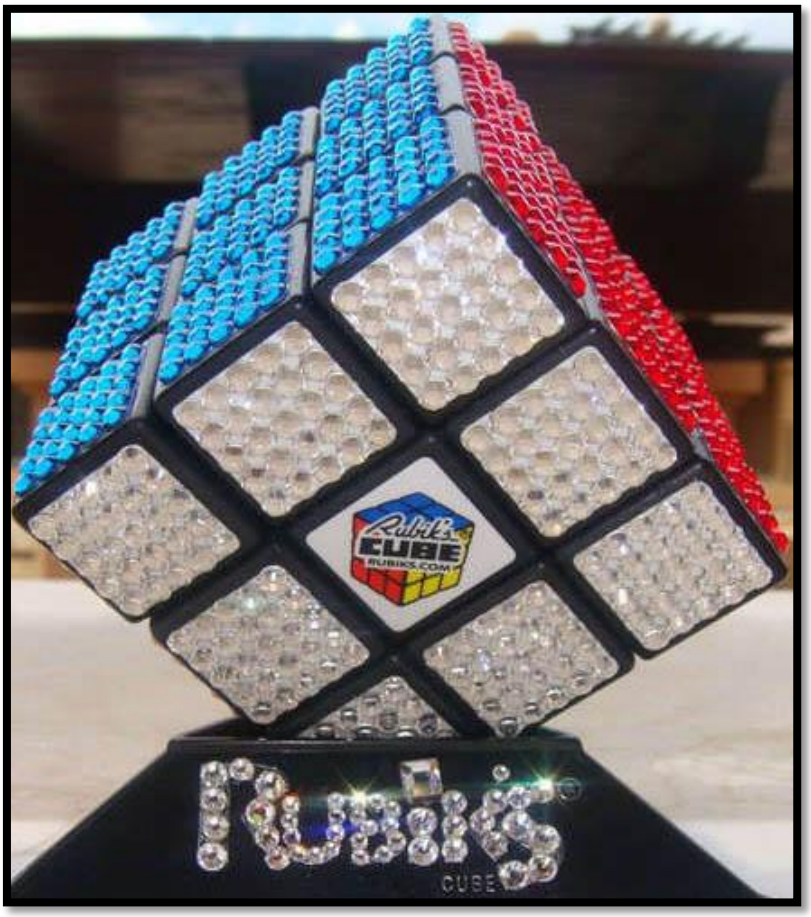
Moltes gràcies per la informació proporcionada i per tota aquesta estona dedicada.

Habitatge unifamiliar aïllat i mossegat

EL CUB DE RUBIK (THE RUBIK'S CUBE)

El Cub de Rubik original de 3x3 és el desafiament més adictiu multidimensional que ha fascinat als fans del puzle d'arreu des de que el creador Ernö Rubik el va portar al món el 1980.
Tres dècades més tard, el Cub de Rubik encara és un dels trencaclosques més venuts. Amb 43 Quintilions de possibles moviments i únicament una solució. L'algorisme de Déu és la solució que resol el puzle amb el mínim de moviments possibles. Una vuitena part de la població del món, ha posat les seves mans en "el Cub".

El Cub de Rubik està format per sis cares amb una disposició de 3x3 cubs petits, el qual cada cara està pintada d'un color. L'objectiu consisteix en barrejar el cub i finalment obtenir-lo resolt novament amb cada cara d'un color a partir de combinacions.



7. ERNÖ RUBIK I LA HISTÒRIA DEL SEU CUB

Ernö Rubik va néixer a Budapest, Hungria, l'any 1944 durant la Segona Guerra Mundial. El seu pare era un enginyer mecànic molt reconegut especialitzat en la construcció d'avionetes. La seva mare estava especialitzada en lletres. Era poetessa i artista.

Al principi, Rubik, es dedicava a l'estudi de les Belles Arts cursant la secundària a una escola de Belles Arts, com a escultor. Durant aquesta època és quan va despertar el gust per la tècnica.

Més tard va continuar estudiant a la Universitat d'Ensenyament Tècnic de Budapest, on va obtenir el diploma com arquitecte l'any 1967.
L'Arquitectura el va apassionar de tal manera que va continuar els seus estudis a l'Escola Superior d'Arts Decoratives, en la secció d'arquitectura interior on va aconseguir el títol de dissenyador.

El 1970, Rubik es va introduir en el món de la docència: ensenyament de plans i construccions, dissenys d'arquitectura interior, plans i projectes de mobles, estudis de forma i geometria descriptiva a l'Escola Superior

Rubik tenia un gran interès per la geometria, en contret, en l'estudi de formes en 3D en les seves construccions. També es dedicava a trobar les possibles combinacions i materials per a construir formes geomètriques. Aquesta investigació no només es donava a nivell teòric, sinó també a nivell pràctic.
Com he dit anteriorment Ernö Rubik es dedicava a la docència. Ell creia que la millor manera d'oferir coneixements era facilitant la manipulació i experimentació dels nous aprenentatges. Així doncs, a l'hora d'ensenyar als seus alumnes, Ernö Rubik preferia comunicar les seves idees utilitzant models d'actualitat. Utilitzava el paper, el plàstic, el cartró o la fusta permetent als seus alumnes poder experimentar amb aquestes formes construïdes i poder-ne fer una fàcil interpretació.

La principal atracció d'Ernö per inventar el Cub no va ser el descobriment del puzle. El que realment va fer moure a Ernö per construir el cub va ser la següent pregunta "Com podrien moure's els cubs independentment l'un de l'altre sense caure?" El cub de Rubik està compost per vint-i-sis cubs petits individuals. Cada cara compte amb nou cubs petits que es poden barrejar i les cares poden quedar superposades. Qualsevol dels tres costats d'una fila, excepte diagonalment, poden moure's a una altra cara. El primer intent de Rubik, utilitzant gomes elàstiques va fallir. La seva solució va ser mantenir els petits cubs units entre ells aprofitant la forma cúbica del puzzle. Va marcar cada cara gran del Cub amb papers adhesius de diferents colors i el va començar a barrejar.

"*Va ser meravellós veure com, després d'alguns girs, els colors esdevenien barrejats, aparentment de forma aleatòria. Va ser tremendament satisfactori veure aquella desfilada de colors. Igual que després d'una agradable caminada quan has pogut gaudir de vistes molt boniques i decideixes tornar a casa. Uns minuts més tard, vaig decidir tornar, i posar de nou cada cub petit al seu lloc. I va ser llavors quan em vaig trobar enfrontat amb el Cub. El gran repte, en aquell moment, va ser: Quin és el camí de tornada?*" – Ernö Rubik.

Així va ser inventat el Cub com a puzle la primavera del 1974, quan el jove de vint-i-nou anys va descobrir que no era tant fàcil de reordenar els colors en sis cares unicolors. No estava segur de ser capaç de tornar el seu invent a la seva posició original. Creia que al haver desordenat el Cub de manera aleatòria, mai seria capaç de reordenar-lo en el que li quedava de vida. Va començar a treballar per trobar una solució, començant alineant els vuit cubs de les cantonades. Va descobrir algunes seqüències de moviments per reordenar únicament un cub petit cada vegada. D'aquesta manera, en menys d'un mes va tenir el puzle solucionat.

Un cop va tenir el cub construït i va saber-lo solucionar, Rubik el va mostrar als seus estudiants i va permetre que alguns dels seus amics juguessin amb ell. L'efecte va ser instantani. Rubik va quedar sorprès a causa del gran interès dels seus amics i estudiants cap el cub. Aquest cub, va ser patentat, inicialment, com el Cub Màgic (The Magic Cube) i una gran indústria de joguines anomenada *Polithechnika* va iniciar la difícil tasca de la producció massiva d'aquest cub.

El primer Cub Màgic es va vendre en una botiga de joguines de Budapest i degut a la seva ràpida venda es va estendre a gran velocitat arreu del país.

Les ventes del "Cub de Rubik" no eren molt eficaces fora d'Hongria, fins que un home de negocis hongarès, Tibor Laczi, va descobrir el Cub. Laczi va quedar impressionat per aquell puzle tant magnífic. L'endemà, es va encarregar personalment de demanar permís per poder vendre el cub per l'Oest del planeta.

"Quan en Rubik es dirigia a mi, vaig pensar que em venia a demanar diners, semblava un vagabund. Anava molt mal vestit, i portava un cigar hongarès a la boca. Però sabia que tenia un geni davant meu amb el seu invent, el Cub Màgic." Aquesta és el primer pensament que va tenir Tibor Laczi la primera vegada que es va trobar amb Ernö Rubik.

El 1979, es va signar un pacte amb Ideal Toys per expandir el "Cub Màgic" i el puzle va fer el seu debut el 1980.
Gràcies al meravellós debut internacional i a la gran venta del Cub, es va aconseguir exportar-lo arreu del món. Pel fet de la gran importància del Cub arreu del món i que l'empresa Ideal Toys volia un nom específic i conegut internacionalment i per la patent, se'l va renombrar: Cub de Rubik (The Rubik's Cube). Va ser llavors quan van començar a aparèixer imitacions més barates del Cub però sense èxit.

Mentre les patents de Rubik pel seu cub s'estaven processant, Terutoshi Ishigi, un professor d'enginyeria de Tokyo, va obtenir una patent Japonessa per un mecanisme quasi idèntic al Cub de Rubik. Actualment, l'invent d'Ishigi no és reconegut com un invent pròpiament dit, sinó que és reconegut com a un arrengament d'un invent posterior.

El 28 d'Octubre del 1980, Rubik va obtenir una altra patent d'Hongria. El 29 de Març del 1983, Rubik va obtenir la patent dels Estats Units del seu cub i altres puzles inventats per ell, tot i que no tant populars com el Cub de Rubik.

Poder aconseguir el Cub, ser capaç de reordenar les sis cares de color, era un repte que atreia l'atenció a diferents individus de la societat independentment de l'edat, sexe i classe social.

Però van ser els joves estudiants, els qui es van adonar de la importància del cub en aquell moment arreu del món. Ells eren qui tenien més capacitat de resoldre aquest puzle i van ser els responsables de formar clubs dedicats al cub, organitzant competicions.

Patrick Bossert, un noi anglès de 12 anys, va publicar un llibre titulat " Tú pots fer el cub" (You Can Do the Cube). Venent-se'n més d'un milió i mig d'exemplars.

El 5 de Juny del 1982 va tenir lloc el primer campionat internacional del Cub de Rubik a Budapest on s'hi van presentar 19 cubistes de diferents nacionalitats. Els competidors tenien la possibilitat d'observar el cub durant 15 segons abans de començar-lo a resoldre.
Els tres guanyadors i les seves respectives marques d'aquest campionat van ser:

1. Minh Thai (Estats Units) 22.95 s
2. Razoux Schultz (Noruega) 24.32 s
3. Zoltán Lábas (Hungia) 24.49 s

Ernö Rubik es va convertir en el President de l'Acadèmia d'Enginyeria d'Hungria i més tard va fundar la International Rubik Foundation per donar suport a joves dissenyadors amb talent.

Pel 15è aniversari del Cub de Rubik, la companyia Diamon Cutters Internacional, va crear el "Masterpiece Cube". Un cub fet d'or amb diamants de colors incrustats al cub.

El 1999 es va celebrar el 25è aniversari de la Creació del Cub i es va fabricar una edició limitada de Cubs de Rubik per a la ocasió. També es va celebrar un Campionat del Món del Cub de Rubik a Budapest i Ernö Rubik hi va assistir per fer l'entrega de premis als guanyadors.

Actualment es poden aconseguir cubs a molts establiments i encara existeixen clubs i fòrums dedicats al Cub de Rubik. La millor manera de comprar un cub és a partir d'Internet a moltes pàgines web dedicades a això, tot i que moltes vegades és més pràctic anar a comprar el cub a qualsevol botiga de joguines.

Relacionat als fòrums i als clubs dedicats al Cub de Rubik, se'n coneixen pocs si no s'està habituat al món, però n'existeixen molts. Un exemple que es coneix de club dedicat al Cub de Rubik, és el Club de Rubik de Catalunya: un grup de joves que es dediquen a fer trobades de tant en tant i a parlar del cub. També es dediquen a organitzar competicions del Cub de Rubik anomenats Open.
Així doncs queda ben clar que, el Cub de Rubik és un èxit ja que des de la seva aparició al mercat l'any 1974, més de 200 milions de cubs s'han venut arreu del món.

8. PATENTS I VARIANTS:

El Març del 1970, en Harry D. Nichols va inventar un Puzzle de 2x2x2 amb peces que podien moure's rotativament per grups i en va obtenir una patent Canadenca. El cub d'en Nichols estava construït per peces magnètiques. Més tard, l'abril de l'any 1972, Nichols va obtenir una patent dels Estats Units pel seu invent.

El 9 d'abril del 1970, Frank Fox va inventar un puzle esfèric de 3x3x3, i en va obtenir la patent del Regne Unit quatre anys més tard, tot i que va ser abans que Ernö Rubik.

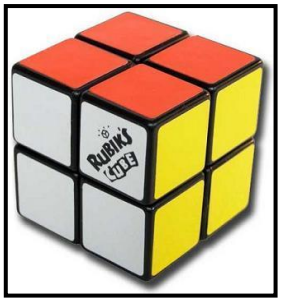
Rubik va inventar el "Cub Màgic" el 1974 i en va obtenir la patent d'Hongria el 1975, però no la patent internacional. Ernö va fer arribar el seu invent a una petita fàbrica de joguines de Budapest. El "Cub Màgic" estava compost per peces de plàstic entreposades, cosa que era menys car de produir que el disseny magnètic de Nichols, per això va tenir més èxit.

Es coneix un gran nombre de variants del Cub de Rubik, amb no tant èxit, però també reconeguts per a la societat. Alguns d'aquests puzles derivats del Cub són els següents:

- **Rubik's 360º :** format per tres esferes transparents que contenen 6 boles de colors. Per solucionar el puzzle cal moure les boles de colors des de l'esfera interior a la exterior i col·locar-les al petit espai del seu mateix color.
  Sembla fàcil, però no ho és. Les dues esferes interiors, contenen un pes per tal de que, quan vols fer passar les boles pels forats, t'és difícil ja que els forats queden amunt per la força de la gravetat.
  A diferència del Cub de Rubik original, el Rubik's 360º no es pot resoldre a partir d'algorismes. Es tracta d'utilitzar la teva ment per intentar resoldre'l. Això vol dir que aquest puzzle és possible de resoldre a qualsevol edat, des dels 8 anys fins als 80.
  El Rubik's 360º va sortir a la venta el Febrer del 2009 i ha tingut un gran èxit.

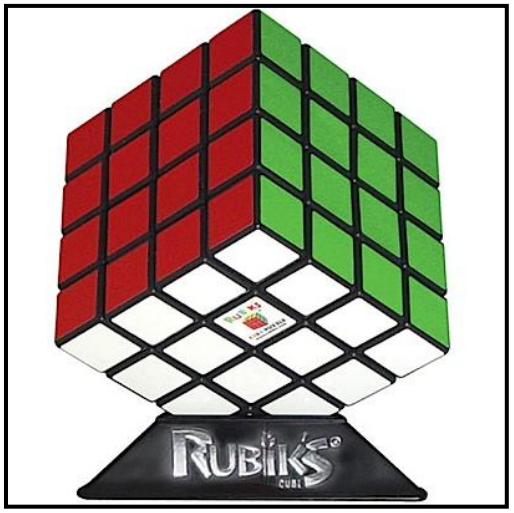
- **Rubik's Mini Cube (2x2):** També conegut com el Cub de Butxaca (Pocket Cube). Tot i que té mida de butxaca i és menys intimidant aparentment, proporciona un repte molt complex.
  L'objectiu és exactament el mateix que el del cub més gran: moure cada cara mitjançant una combinació determinada de moviments per tal d'aconseguir cada una de les sis cares d'un mateix color sòlid.
  El Mini Cub de Rubik ofereix les mateixes normes geomètriques i lògiques per a solucionar-lo.

  Erik Akkersdijk té el rècord mundial en solucionar el Rubik's Mini Cube en una competició, amb un temps de 1.96 segons a l'Open de Geneva 2008. Rowe Hessler va igualar el rècord als Nacionals d'Estats Units 2010.
  Referit al millor *average* de cinc temps, Feliks Zemdegs manté el rècord amb un temps de 2.35 segons, aconseguit en un Campionat Asiàtic el 2010.



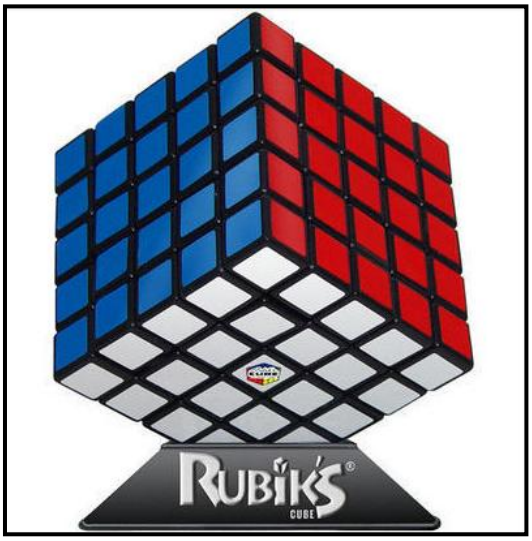
- **Rubik's Revenge (4x4):** També conegut com "The Master Cube" és la versió de 4x4x4 del famós cub de 3x3x3.
  El cub està format per 56 cub petits a la seva superfície. Tot i que, a diferència del Cub de Rubik, les peces centrals es poden moure en relació les altres, fent-lo així encara més difícil de solucionar.

  Des de l'octubre del 2010, el rècord mundial amb el millor temps per a solucionar el Cub de 4x4x4, el té Feliks Zemdegs d'Austràlia amb un temps de 34.41 segons, aconseguit a un Campionat Asiàtic el 2010.
  El millor *average* de cinc temps, es troba als 40.86 segons, aconseguit per Haixu Zhang de Xina, aconseguit a l'Open de Guangdong 2010.



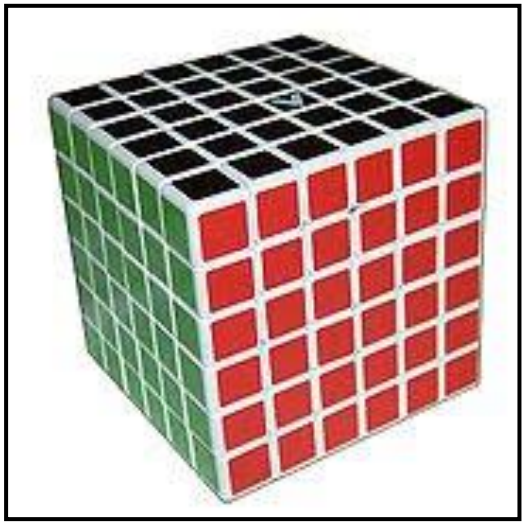
- **Rubik's Professors Cube (5x5):** Format per 98 quadradets exteriors: 8 cubs vèrtexs, 36 cubs arestes i 54 cubs centres.
  El gran nombre de permutacions, és a dir, de moviments per aconseguir completar el puzle, en el cub de 5x5x5 ha estat calculat, i és de 283 dodecillion.

  L'octubre del 2010, el record mundial en resoldre el Cub de Rubik de 5x5x5 el va guanyar Feliks Zemdegs d'Austràlia, resolent-lo en 1 minut, 2 segons i 93 centèsimes de segon, a les Nacionals Australianes el 2010.
  Ell mateix també manté el rècord mundial de l'a*verage* de cinc temps, 1 minut, 7 segons i 59 centèsimes de segon, aconseguit al mateix campionat.



- **V-cube 6 (6x6):** Una altra de les moltes variacions del Cub de Rubik més conegut, el de 3x3x3. Aquest cub està format per 8 cubs vèrtexs, 58 cubs arestes i 96 cubs centres, per tant, es pot dir que està format per un total de 162 quadradets.

  El rècord munidal en quan a rapidesa a l'hora de resoldre el cub, està en mans de Feliks Zemdegs amb 2 minuts, 5 segons i 88 centèsimes de segons. Va guanyar el premi el Gener de l'any 2011 a l'Open d'estiu de Melbourne.



- **V-cube 7 (7x7):** Variació del Cub de Rubik bàsic (3x3), amb el major nombre de quadrats costat que es coneix. Està format per un total de 294 quadradets.

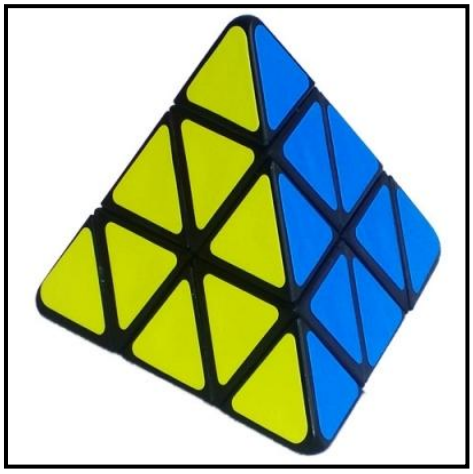
  Yu Nakajima és reconegut per tenir el rècord mundial a l'hora de ser el més ràpid en fer el Cub de 7x7 amb un temps de 3 minuts, 47 segons i 36 centèsimes de segons. Yu també té el rècord en *average* de cinc intents amb 4 minuts 1.73 segons.

- **Rubik's Mirror:** Diferent versió del Cub de Rubik 3x3x3, de la mateixa mida i forma, però en comptes de tenir-lo solucionat quan tens cada cara d'un color uniforme, es té solucionat quan el puzle ha pres novament forma de cub. Es juga amb la forma de les peces per a poder-lo resoldre.

- **Rubik's Twist:** També anomenat La Serp (The Snake). És un puzle que pot prendre il·limitades formes, només cal barrejar-lo i veure quines quins resultats obtens. Es pot convertir una serp, en una espasa, un ratpenat, en una pilota, una tortuga, en un gos i moltes figures més, tot únicament utilitzant la teva imaginació.
  També es pot utilitzar com a eina d'aprenentatge, ja que t'ajuda a pensar en diverses formes i espais.
  El Rubik's Twist està compost per vint-i-quatre petites estructures amb la forma idèntica en forma de prisma i connectades, per tant que poden moure's però no separar.

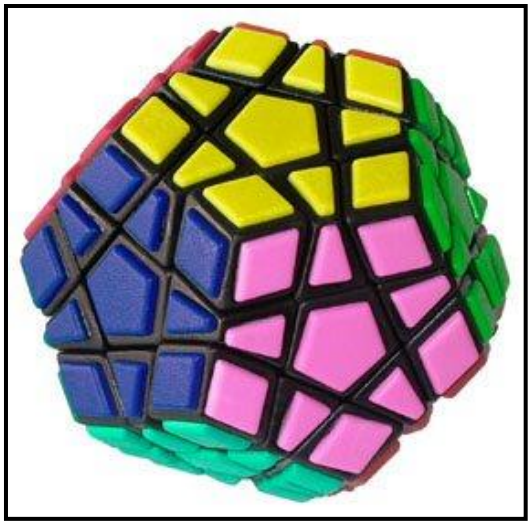
- **Pyraminx:** Trencaclosques mecànic en forma de tetraedre. El nombre màxim de girs per resoldre'l és d'11. Existeixen 933.120 posicions diferents del puzle, i per tant, és fàcil trobar una possible solució.

  El rècord mundial resolent el Pyramix pertany al polonès Tomasz Kiedrowicz, amb un temps de 2.83 segons a l'Open Gdansk l'any 2008.



- **Megaminx:** en forma de dodecàedre. Està format per 12 peces centrals, 20 peces vèrtex i 30 peces aresta. Cada una de les peces centrals està situada a una cara diferent, tenen diferents colors i són les que permeten identificar el color de la cara a l'hora de resoldre'l. Una cara del megaminx està format per una peça central, 5 peces vèrtex i 5 peces arestes, que són les que uneixen dues cares.

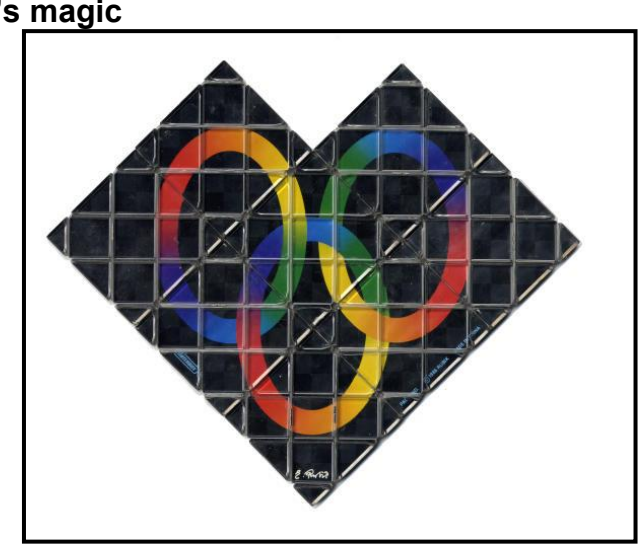
  El rècord mundial en la resolució del Megaminx pertany al hongarès Bálint Bodor, amb un temps de 57.94 segons a la Competició Mundial del Cub de Rubik (World Rubik's Cube Championship) el 2009.



- **Cuboku:** és una barreja entre els Sudokus i el Cub de Rubik. Té les característiques del cub en quant a funcionament, però l'objectiu és aconseguir trobar els Sudokus que conté el cub. Resoldre'l per atzar és impossible, però cal tenir en compte que, l'orientació dels nombres d'una mateixa cada cara, és la mateixa.

Els explicats anteriorment, són els puzles més coneguts relacionats amb el Cub de Rubik, però n'hi ha molts més, no tant importants ni famosos, com per exemple:

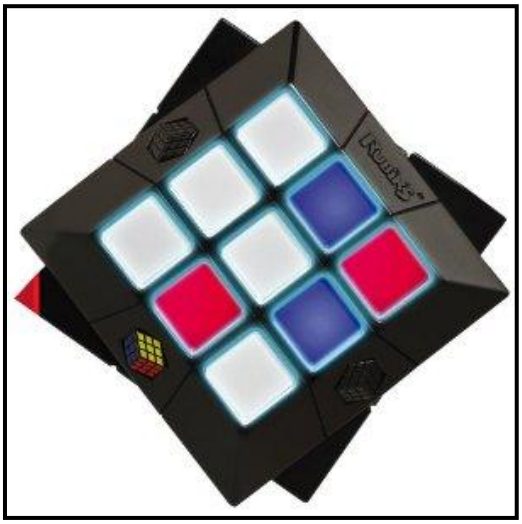
- **Rubik's magic**



- **Rubik's keychain (clauer)**

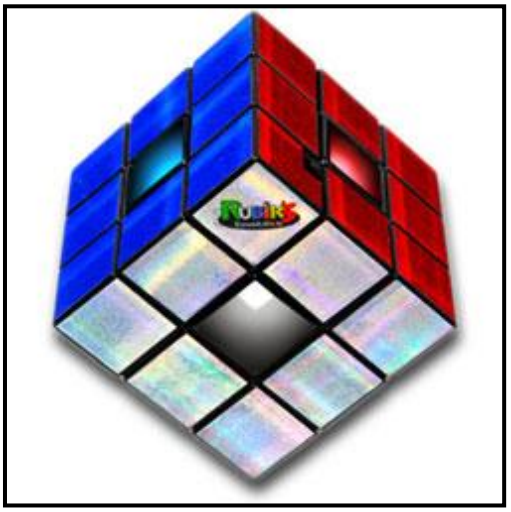
També trobem algun joc electrònic de la branca del Cub de Rubik, com pot ser:

- **Rubik's slide**



- **Rubik's touch**

- **Rubik's revolution**



9. CAMPIONATS OFICIALS

Els cubistes, són aquelles persones que es dediquen a anar en competicions per tal d'obtenir rècords i bones marques a l'hora de resoldre el Cub de Rubik i les seves variants més comunes.

Hi ha diverses competicions del Cub de Rubik, depenent de la importància dels temps.

- **Opens:** Campionats que es fan cada any a diferents ciutats d'arreu del món. Els cubistes més seguidors, van a diversos d'aquests Opens, per tal d'intentar aconseguir marques més favorables i poder entrar a campionats de major importància.
  La llista dels d'alguns Opens que es duen a terme durant l'any són:

Data	**Nom**	**Ciutat, País**
4 Juny de 2011	Mola Open 2011	Polònia, Gdansk
10 – 12 Juny 2011	Alania Open 2011	Alemanya, Aachen
18 Juny 2011	Ohio Open 2011	EEUU, Columbus, Ohio
19 Juny de 2011	Henan University Open 2011	Xina, Luoyang, Henan
25 Juny de 2011	Chonburi Open 2011	Tailàndia, Chonburi
26 Juny de 2011	Skàrup Last Chance 2011	Dinamarca, Skàrup
1 Juliol 2011	Cube Canada Day 2011	Canadà, Saint John, New Brunswick
15 – 17 Juliol de 2011	Czech Open 2011	República Txeca, Pardubice
22 – 24 Juliol de 2011	Indonesian Open 2011	Indonèsia, Jakarta
29, 30 Juliol de 2011	Barcelona Open 2011	Espanya, Sant Cugat
30, 31 Juliol de 2011	Ha Noi Open 2011	Vietnam, Ha Noi
6 Agost de 2011	Xining Summer Open 2011	Xina, Xining
13 Agost de 2011	Robinsons Galleria Open 2011	Filipines, Quezon City
27, 28 Agost de 2011	Uberlandia Open 2011	Brasil, Uberlandia, Minas Gerais
1, 2 Setembre de 2011	Iran Open 2011	Iran, Tehran
15, 16 Setembre de 2011	DJ Speedcubing Open 2011	India, Mumbai
17, 18 Setembre de 2011	Basauri Open 2011	Espanya, Basauri (Bilbao)
18 Setembre de 2011	Austrian Open 2011	Àustria, Vienna
24, 25 Setembre de 2011	Poznan Open 2011	Polònia, Poznan
1, 2 Octubre de 2011	Shaastra Cube Open 2011	India, Chennai
8 Octubre de 2011	Amstelveen Open 2011	Netherlands, Amstelveen
5, 6 Novembre de 2011	Cachan Open 2011	França, Cachan

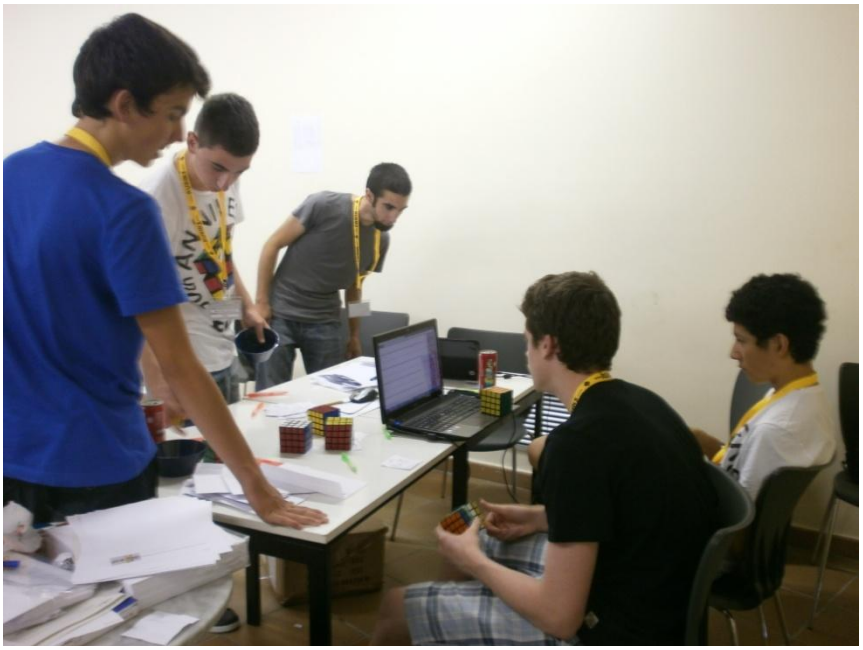
19, 20 Novembre de 2011	Croatian Open 2011	Croàcia, Zagreb
26, 27 Novembre de 2011	Munich Open 2011	Alemanya, Deutschland
17 Desembre de 2011	MIT Fall 2011	EEUU, Cambridge, Massachusetts

- **Campionats Nacionals:** Competicions anuals, que es fan als països més importants mundialment, com poden ser Londres, Estats Units, Xina...
- **Campionats Europeus:** Competicions que es celebren cada dos anys, on hi participen els cubistes que han tret millors temps en els Campionats Nacionals.
- **Campionats Mundials:** Competicions que es celebren cada dos anys, i on competeixen els millors cubistes dels Campionats Europeus. Cada competició es celebra en una ciutat diferent, però sempre a les més importants a nivell mundial.

Fotos del Barcelona Open 2011 celebrat el passat 29 i 30 de Juliol de 2011 a Sant Cugat:

Vista general del local on es va celebrar
el Barcelona Open 2011

Cubista (asseguda) observant el cub per a poder iniciar la resolució amb el controlador al costat (dret).



Cubistes encarregats de barrejar els cubs a partir de pautes, per als concursants

Cada un de tots aquests campionats, tenen unes normes oficials i uns requisits indispensables a complir. Per a més informació de les normes, veure pàgina: http://www.worldcubeassociation.org/regulations/

10. ALGORISMES DE RESOLUCIÓ:

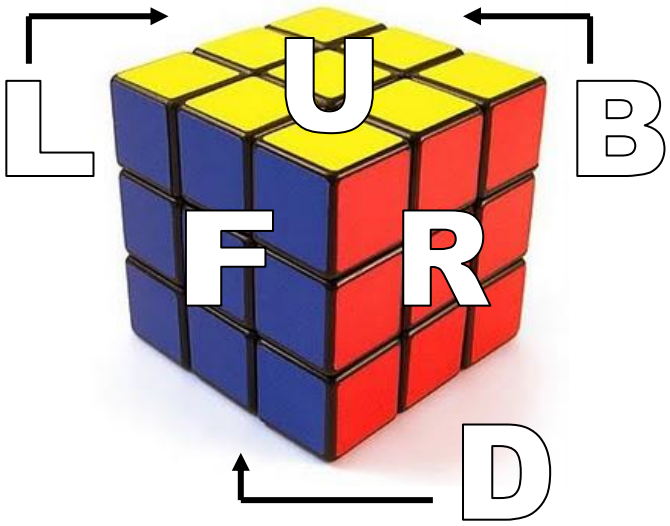
Per a resoldre el Cub de Rubik una vegada està barrejat, cal seguir un seguit de moviments anomenats algorismes o algoritmes.
Hi ha diversos procediments per a poder resoldre el puzle, depenent de la capacitat de la persona que el vol completar o de la disposició a passar temps per aprendre-ho.
Alguns dels procediments possibles són:

- Mètode per a principiants
- Mètode per a experts (Fridrich)
- Mètode a cegues (Blindfolded)

10.1 MÈTODE PER A PRINCIPIANTS:

10.1.1 Notació simple

Però el més important de tot, abans de començar a aprendre a fer el cub, és aprendre la Notació utilitzada a nivell internacional, que servirà posteriorment per a descriure els diversos moviments.



A cada cara se li assigna una inicial que fa referència a la posició on es troba el cub. Cal tenir en compte que depenent de com s'agafa el cub, les posicions canvien i per tant, també canvia el nom de cada cara, és a dir, que en aquest cas la cara groga ha pres el nom "U", la vermella el nom "R" i la blava el nom "F", però si movem el cub i l'orientem d'una altra manera, aquestes cares prendran altres noms.

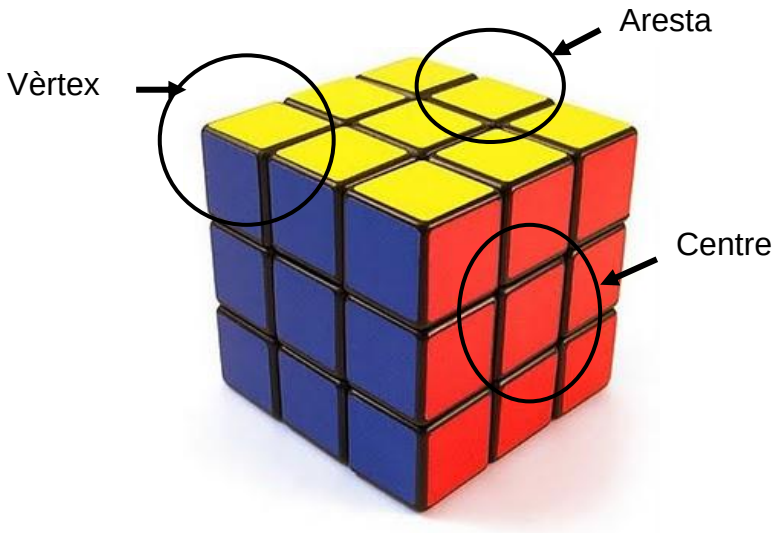
Les inicials estan extretes de la posició de la cara en anglès:

- *Front:* Davant (Blau)
- *Back*: Darrere (Verd)
- *Right*: Dreta (Vermell)
- *Left*: Esquerra (Taronja)
- *Up*: Sobre (Groc)
- *Down*: Sota (Blanc)

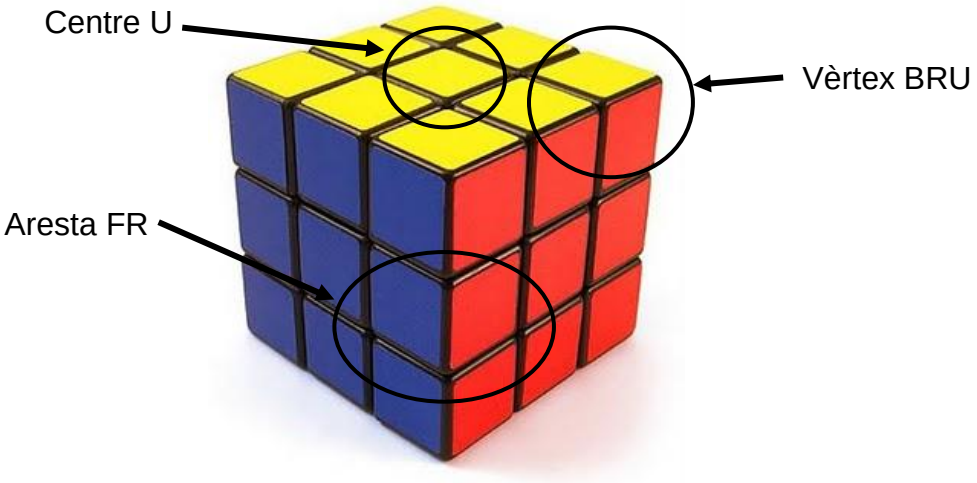
Un cop ja s'ha donat nom a cada cara, és necessari donar nom a les diferents peces. En un Cub de Rubik hi ha essencialment tres tipus de peces: centres, arestes i vèrtexs.

- Centres: peces fixes de cada cara, i per tant són les encarregades de determinar el color d'una cara.
- Arestes o costats: peces que es troben entre dos centres i tenen el color dels dos que uneix.
- Vèrtexs: peces de tres colors i es troben al punt on s'uneixen tres cares diferents.

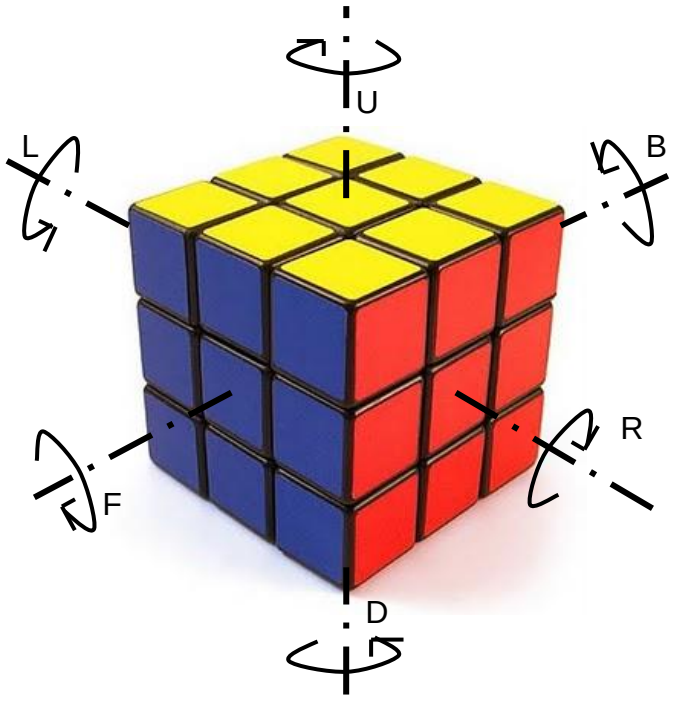
Per a diferenciar-los es pot pensar en que els centres estan formats per un sol quadrat, les arestes estan formades per dos quadrats, i els vèrtexs estan formats per tres quadrats.



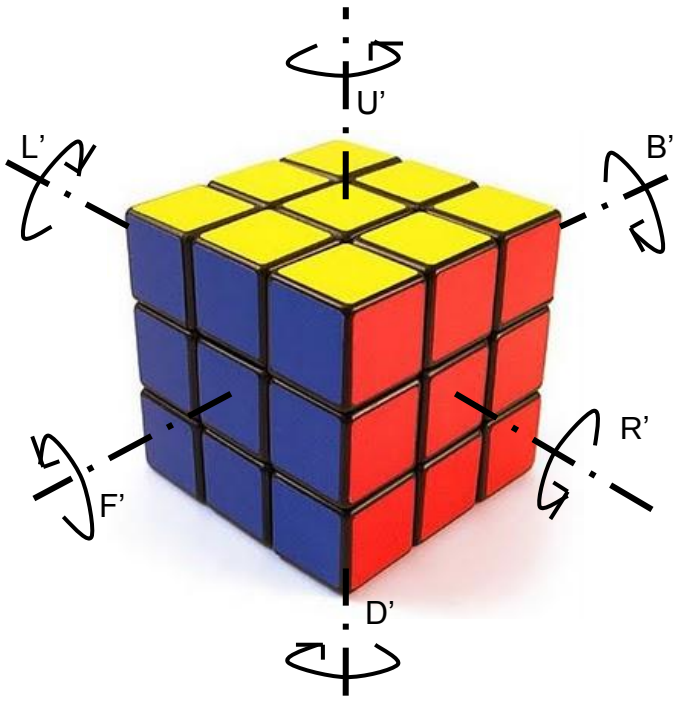
Relacionat amb la notació d'arestes, les anomenarem pel nom de les dues cares del cub en les quals l'aresta hauria d'estar si el cub estigués ben fet. D'aquesta manera, per exemple, l'aresta que es troba en la posició marcada, que es troba al punt on s'uneixen la cara F i la cara R, se l'anomenarà FR o RF. De la mateixa manera, els vèrtexs s'expressen utilitzant el nom de les tres cares del cub en els quals el vèrtex hauria d'estar si el cub estigués ben fet. Com a exemple, el vèrtex marcat, s'anomena BRU. I finalment, els centres s'anomenen per la cara en què es troben. Per tant, el centre que es troba a la cara groga, s'anomena U.



Per a definir un moviment, que en el cub, sempre serà el gir d'una cara, s'utilitzarà la lletra amb la qual anomenem la cara que es vol fer girar. Cada moviment expressat d'aquesta forma, constarà d'un gir de 90º (un quart de volta) sempre en sentit horari. Per tant, els eixos de rotació seran de la següent manera:



De la mateixa manera, es poden definir girs en sentit antihorari, que seria fer girar la cara del cub 270º en sentit horari o seria el mateix que fer el moviment explicat anteriorment però repetit tres vegades. Però és preferible fer-lo girar 90º en sentit antihorari per tal de facilitar l'escriptura. Per expressar aquest gir, es posa una cometa (') darrere el nom de la cara que es vol fer girar. Els eixos rotatoris de cada cara quedaran de la següent manera:



Com a últim moviment que s’ha de conèixer i per tant, entendre’n la seva expressió, és quan es vol fer un gir de mitja volta, és a dir, de 180º. Per a descriure aquest moviment s’afegeix un dos (2) darrere el nom de la cara que es vol moure. En aquest cas, serà el mateix fer girar 180º una cara en sentit horari com en sentit antihorari ja que acabarà en la mateixa posició.

10.1.2 Resolució per a principiants

Aquest mètode de resolució és el més senzill, per això és recomanat a aquelles persones que han tingut poques vegades contacte amb el Cub. Es tracta de completar la cara inferior, seguidament les peces del mig i per últim la superior.

El mètode està dividit en 7 etapes, les 3 primeres més fàcils i les 4 últimes, amb un nivell de dificultat major.
Les etapes són:

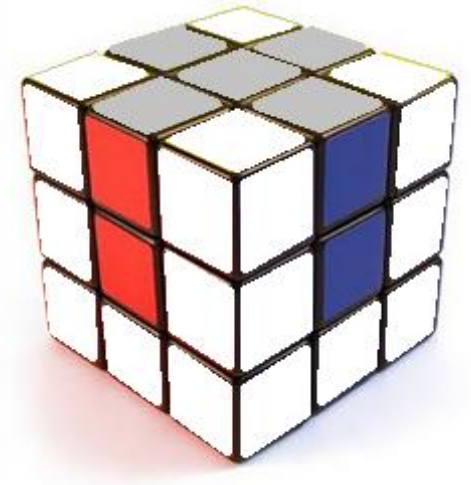
1. Creu de la cara inferior
2. Vèrtexs de la primera corona
3. Arestes de la segona corona
4. Creu de la cara superior
5. Col·locació de la creu superior
6. Col·locació dels vèrtexs de la última corona
7. Orientació dels vèrtexs de la última corona

Explicació del mètode exposat anteriorment:

Primer de tot, cal observar que els quadrats centrals de cada cara són fixes i per tant no es mouran. Aquest fet cal tenir-lo en compte en tot el procés, ja que ens determina el color de cada cara i la posició de cada peça.

1. Creu de la cara inferior

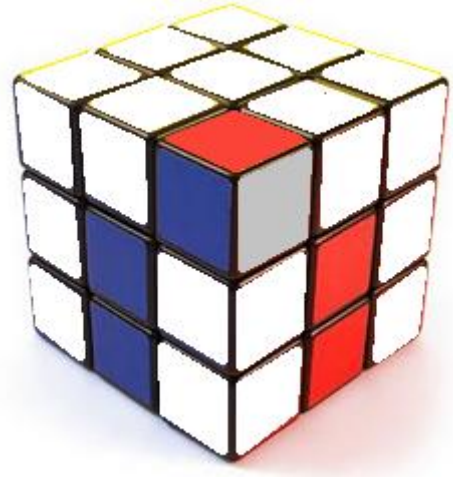
Aquest pas és la part més intuïtiva i fàcil a l'hora de resoldre el cub, consisteix en crear una creu en una cara.
Abans de començar, és necessari triar un color i posar la peça central d'aquest color a la cara superior (U). Posteriorment, cal anar col·locant una per una les 4 arestes del mateix color, sempre tenint en compte que cada peça conté dos colors diferents, i que s'ha de col·locar de tal manera que cadascuna d'aquestes arestes ha de coincidir amb el color de la peça central de les cares adjacents a la que hem triat.
Un cop feta la creu, s'ha de girar el cub per tal que ens quedi la creu a la cara inferior (D).
Com es pot observar, en aquest pas no es segueix cap algoritme ja que es pot resoldre de moltes maneres diferents i sense dificultat.
Cal obtenir la posició fixa següent:



2. Vèrtexs de la primera corona

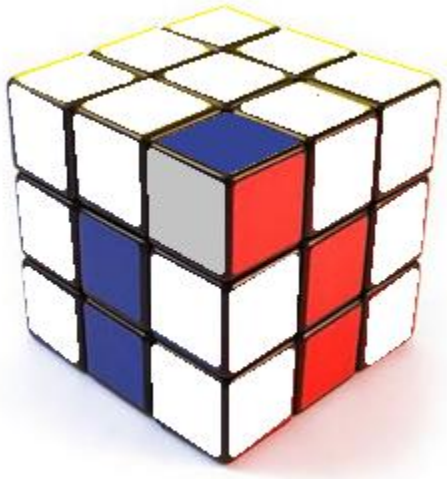
Primer de tot, cal girar el cub de tal manera que la cara gris, que ara es troba en posició U, quedi en posició D, per tant cal posar-la a sota.
Aquesta etapa consisteix en col·locar al lloc corresponent els 4 vèrtex que falten per completar la cara per la qual hem iniciat el puzle.
Per realitzar aquesta etapa, es poden trobar cinc casos possibles i cada un dels casos s'ha de resoldre d'una manera determinada:

- **1r cas:** La peça que s'ha de col·locar es troba en la posició mostrada a continuació:



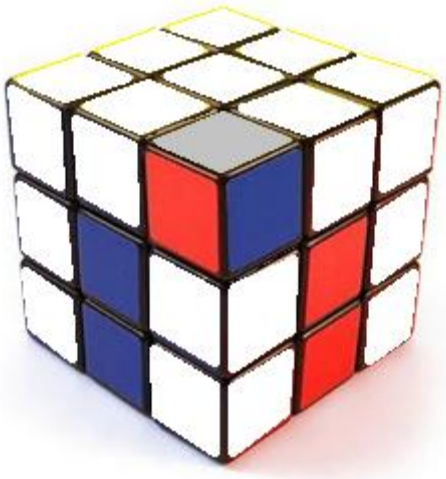
Per a aquest cas, cal una seqüència de moviments molt senzilla que és la següent: R U R'
La seqüència s'ha de seguir segons les normes i la notació explicades anteriorment.

- **2n cas:** La peça que s'ha de col·locar es troba en la mateixa posició que en el primer cas, però en diferent orientació:



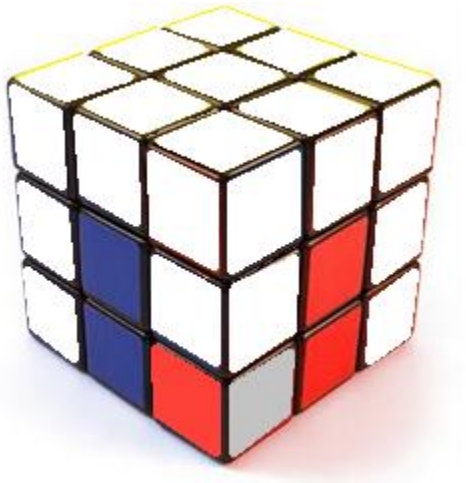
Per a aquest segon cas, també cal seguir una seqüència de moviments, però serà diferent a la anterior, ja que la peça està orientada diferent: F' U' F

- **3r cas:** La peça que s'ha de col·locar es troba en la mateixa posició però en una orientació diferent als dos casos anteriors:



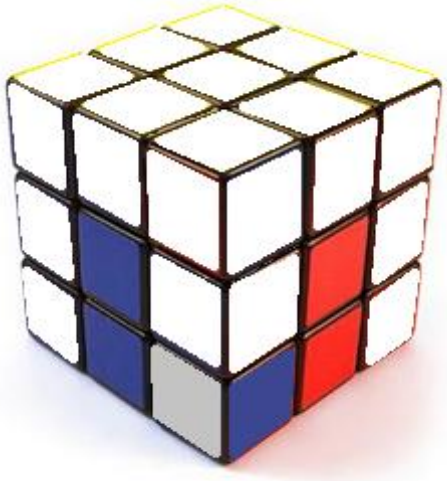
En aquest tercer cas, cal seguir una seqüència més llarga i complexa per a aconseguir posar la peça a la seva posició, i és la següent:
R U2 R' U' R U R'

- **4t cas:** La peça que s'ha de col·locar es troba en la posició mostrada en la imatge:



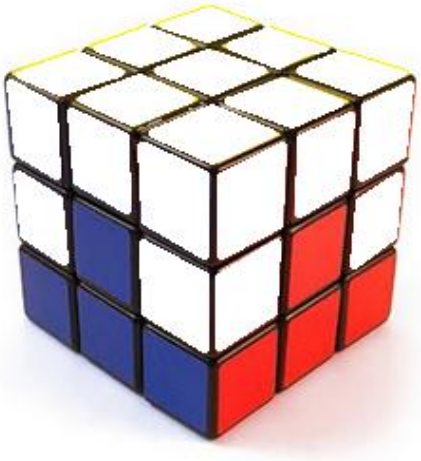
En aquesta situació caldrà seguir la seqüència següent: R U R' U' + cas 1

- **5è cas:** La peça que s'ha de col·locar es troba al mateix lloc que en el cas anterior, però el quadradet que va a la cara inferior, es troba a la cara F, de la manera:



Per tant que s'haurà de seguir la seqüència: R U' R' + cas 2

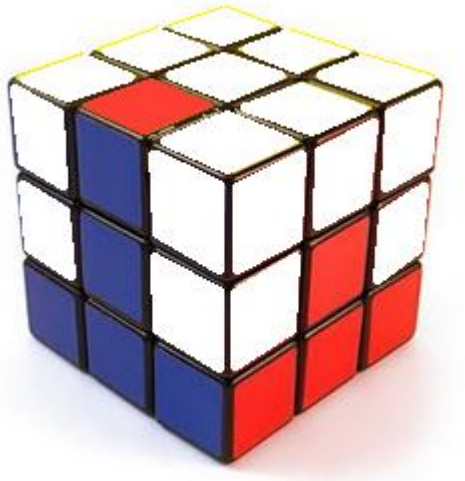
Els esmentats anteriorment són els cinc possibles casos que et pots trobar a l'hora de col·locar els vèrtexs de la primera corona. Un cop seguit el procediment en els quatre vèrtexs, el cub ha de quedar de la manera següent:



3. Arestes de la segona corona

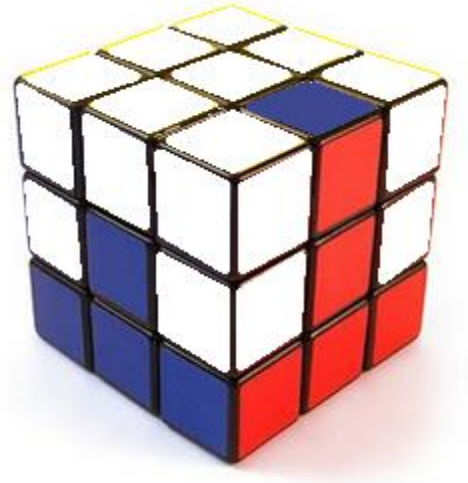
A partir de la mateixa posició del cub que en l'etapa anterior, és a dir, la cara gris en posició U, cal col·locar les arestes de la segona corona per tal d'aconseguir una cara completa i les dues corones següents de la cara a la posició corresponent.
En aquesta etapa hi ha dos possibles casos diferents i també un tercer cas que es dóna quan una aresta es troba al seu lloc però no en l'orientació correcta o en un lloc incorrecte.

- **1r cas:** Cal col·locar la peça que es troba en la posició FU al seu lloc, FR, de la mateixa manera que es pot veure a la imatge:



Per a aconseguir-ho caldrà seguir una seqüència que és la següent:
U R U' R' U' F' U F

- **2n cas:** En aquest cas, la peça FR, que és la mateixa que en l'anterior cas, es troba a la posició RU. Tal i com mostra la imatge:

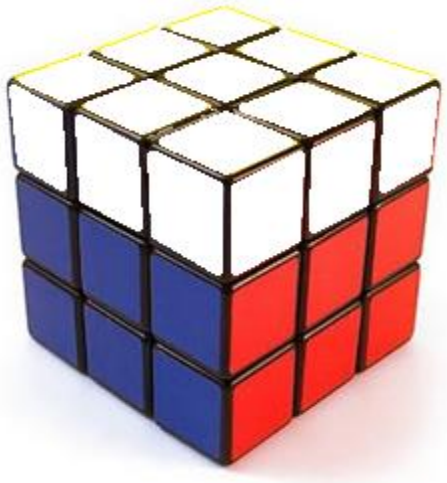


Igual que en el cas anterior, cal seguir una seqüència determinada i molt similar a la seqüència del primer cas, que és la següent:
U' F' U F U R U' R'

- **Cas addicional:** aquest cas es dóna quan tenim la peça que volem col·locar en la posició correcta però no en la orientació adequada o en una posició incorrecta. Es tracta de treure la peça de la posició i després col·locar-la al seu lloc corresponent seguint la seqüència del primer cas o del segon cas depenent de com queda col·locada la peça després de treure-la del lloc on estava:

Per tant, la seqüència que caldrà seguir és: F' U F U R U' R' + cas 1 o cas 2.

Com a resultat de seguir cada una de les seqüències explicades en cada cas depenent del problema en què ens trobem, obtenim una cara completada i els dos primers pisos del cub, i ens queda de la manera següent:



Un cop s'han fet els dos primers pisos, cal resoldre l'última capa. La resolució d'aquest últim pis és més complexa que les tres primeres etapes, i es divideix en quatre etapes:

4. Creu de la cara superior
5. Col·locació de la creu superior
6. Col·locació dels vèrtexs de la última corona
7. Orientació dels vèrtexs de la última corona

Continuació del mètode per a principiants:

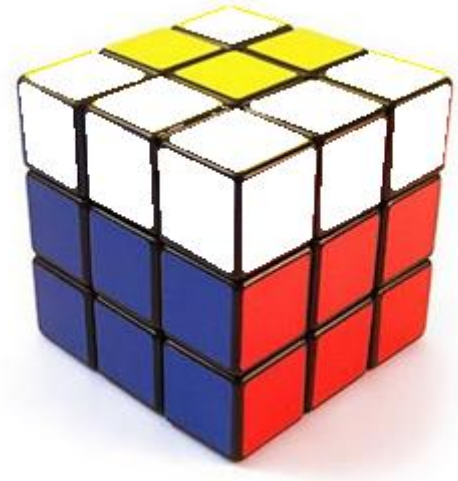
5. Creu de la cara superior

Aquesta etapa consisteix en aconseguir la creu de la cara superior del cub, però no s'ha de confondre aquest pas amb el primer, ja que el primer pas no es té en compte la posició de les altres peces, en canvi en aquest pas, ja es té gran part del cub col·locat a la posició correcta i no volem que es descol·loqui altra vegada. En aquesta etapa també és possible trobar-te amb tres casos diferents, depenent de com tinguem les 4 arestes de la cara superior: una línia, un escaire o un sol punt.

- **1r cas:** Les arestes que han d'anar a la cara superior juntament amb el centre de la seva, formen una línia, tal com es pot observar en la imatge de continuació:

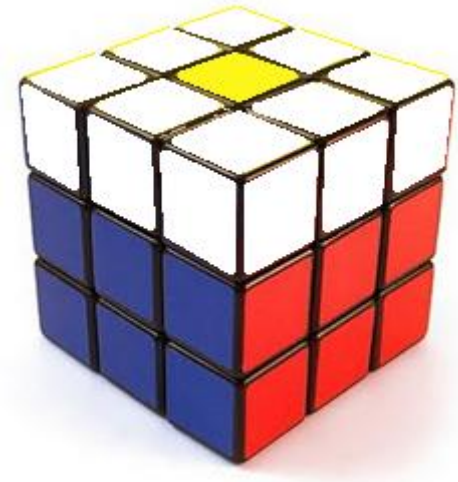
Per a aconseguir una creu cal seguir la seqüència: F R U R' U' F'

- **2n cas:** En aquest cas, les arestes juntament amb el centre de la cara superior, formen una escaire:



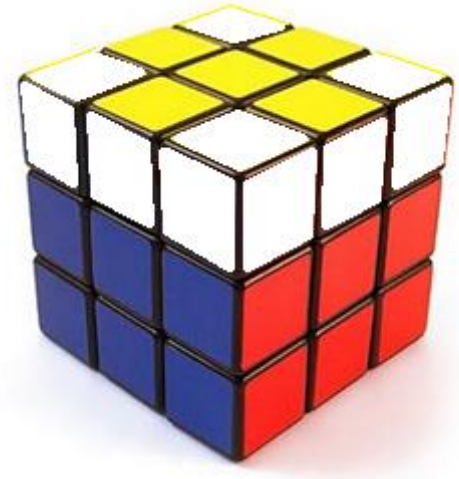
Per tant, per aconseguir la creu a la cara superior cal seguir la seqüència: F U R U' R' F'

- **3r cas:** Aquest cas el detectem quan a l'hora de formar la creu en la cara superior, trobem que només el centre és del color, permetent observar:



Aquest és el cas més complex dels tres, ja que cal combinar les seqüències dels dos casos anteriors, i per tant s'haurà de seguir la seqüència explicada a continuació: Cas 1 + U2 + Cas 2

Per tant, si es segueixen les seqüències exposades anteriorment depenent del cas en què et trobes, s'obtindrà la posició següent del cub:

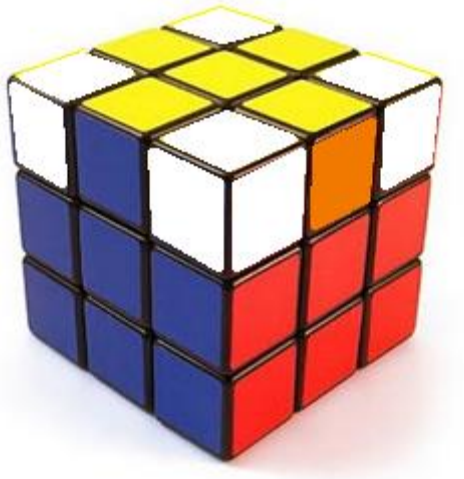


5. Col·locació de la creu superior

L'objectiu d'aquesta etapa és aconseguir que la creu estigui ben col·locada de tal manera que cada una de les quatre arestes que la formen estiguin en la seva posició correcta. Per fer-ho s'utilitzarà un algoritme que permet l'intercanvi de tres peces.

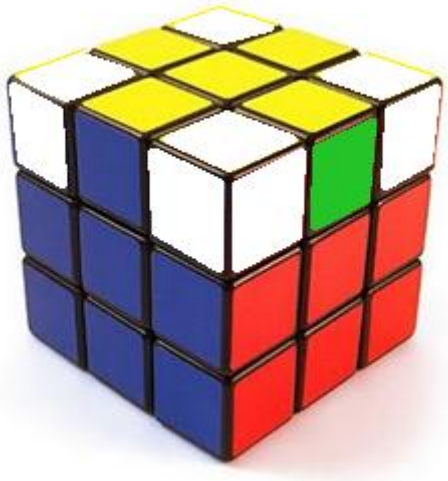
En aquesta etapa, igual que d'altres anteriors, podem trobar tres possibles casos diferents: permutar tres arestes en sentit horari, permutar-les en sentit antihorari, i tenir les arestes oposades dues a dues.

- **1r cas:** Cal posar l'aresta ben col·locada a la cara frontal, a la posició FU. Caldrà ordenar i col·locar correctament la creu permutant les tres arestes mal col·locades en sentit horari. Tenint en compte que l'aresta LU està col·locada en la posició RU, l'aresta RU està col·locada en la posició BU i que l'aresta BU està en la posició LU tal i com mostra la imatge:



Per tant, per a completar aquesta etapa cal seguir la seqüència:
R U2 R' U' R U' R'

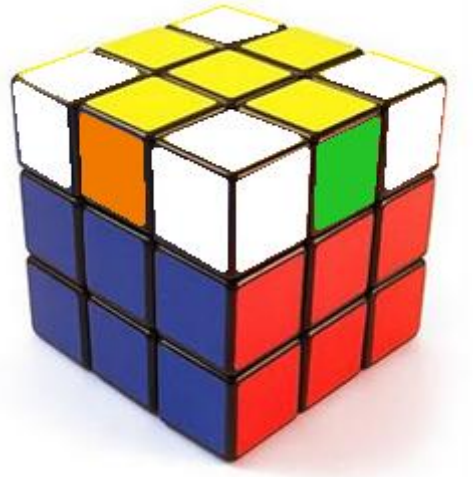
- **2n cas:** Igual que en el primer cas, cal posar l'aresta ben col·locada a la cara frontal, en posició FU. Caldrà fer una permutació de les tres arestes mal col·locades en sentit antihorari. Cal tenir en compte que l'aresta BU està a la posició RU, l'aresta RU està en posició LU, i l'aresta LU està en posició BU. Per a facilitar la comprenció, observa la imatge següent:



-

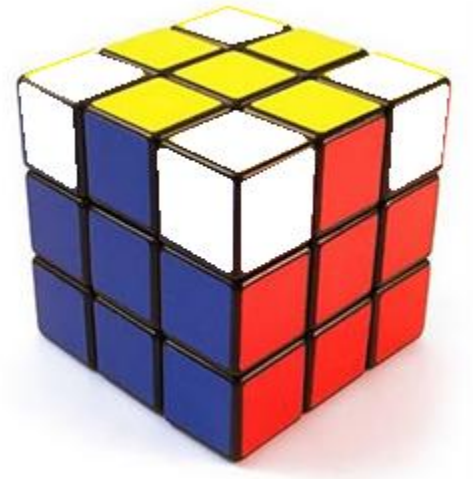
Per tant, per a aconseguir l'objectiu de l'etapa cal realitzar la seqüència: R U R' U R U2 R'

- **3r cas:** Aquest tercer cas és diferent als dos anteriors ja que tenim les arestes oposades dues a dues, i per tant es resol fent la seqüència del primer cas, girant la cara U en sentit horari, i finalment repetir una altra vegada el primer cas.



Per tant, la seqüència serà: Cas 1 + U + Cas 1

Si es realitza bé aquesta etapa, s'obtindrà la creu de la cara superior ben col·locada amb cada aresta al seu lloc corresponent, i per tant, es podrà observar el cub de la següent manera:

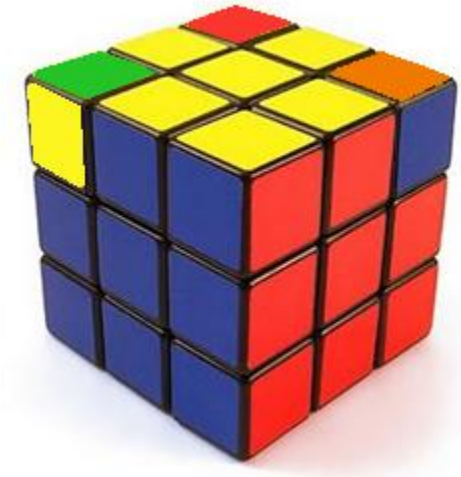


6. Col·locació dels vèrtexs de la última corona

Aquest penúltim cas consisteix en posar al seu lloc correcte els vèrtexs de l'últim pis del cub sempre tenint en compte que és molt possible que quedin girades, és a dir, en la posició correcta, però en orientació errònia.
Per a realitzar correctament aquesta etapa, trobem dues possibles seqüències que consisteixen en un cicle que mou en sentit horari o antihorari tres vèrtexs de la cara superior i un cas extra quan no tenim cap vèrtex a la seva posició correcta. Per poder seguir qualsevol dels dos algorismes correctament, cal

posar el vèrtex que es troba en el seu lloc corresponent en la posició UFR del cub.
En qualsevol dels dos casos que s'exposen posteriorment, la orientació dels tres vèrtexs en la qual es troben, no importa. Simplement ens hem de fixar en la posició a la qual han d'anar situats.

- **1r cas:** Cal utilitzar-lo quan es vol fer una rotació en sentit horari dels tres vèrtexs de la cara superior:

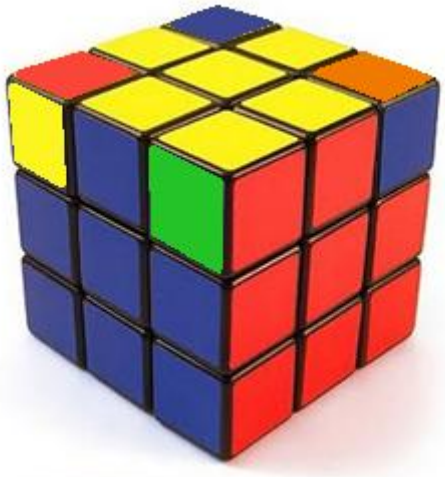


És necessari seguir l'algorisme: L' U R U' L U R' U'

- **2n cas:** Ens trobem aquest cas quan es vol fer una rotació en sentit antihorari dels vèrtexs de la cara superior:

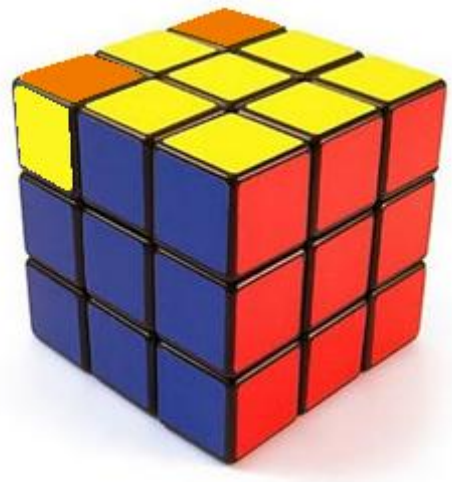
En aquest cas cal seguir l'algorisme: U R U' L' U R' U' L

- **Cas addicional:** Es dóna quan no hi ha cap vèrtex situat a la seva posició correcta. En aquest cas, caldrà seguir el cas 1 i seguidament, trobarem que un dels vèrtexs coincideix i continuar amb el cas 1 o el cas 2 depenent de la posició dels vèrtexs. Com per exemple, de la manera que mostra la imatge:



Per a poder aconseguir l'objectiu de l'etapa, és necessari seguir la seqüència: cas 1 + cas 1 / cas 2

Si es du a terme correctament l'algorisme que sigui necessari, s'aconseguirà que cada vèrtex estigui en la seva posició correcta, tot i que el més probable és que els vèrtexs no quedin ben orientats, com he dit anteriorment. Per tant, un dels possibles resultats que es poden obtenir al completar aquesta etapa, és el següent:



7. Orientació dels vèrtexs de la última corona

Per acabar definitivament el Cub de Rubik, ja només queda aquesta última etapa. Consisteix en orientar cada vèrtexs que prèviament ja s'ha col·locat al seu lloc corresponent. Per fer-ho, s'ha d'utilitzar un algoritme que permet la rotació de dos vèrtexs sobre si mateixos.
Podem trobar diversos casos segons el nombre de vèrtexs que s'hagin d'orientar, i la col·locació dels quals.

- **1r cas:** Trobem aquest cas quan només queden dos vèrtexs de costat mal orientats i les dues cares dels quadradets que han d'anar a la cara U, estan a la cara R. Tal com podem observar a la imatge:

En aquest cas, hem de seguir l'algoritme:
D R' D' R D R' D' R U R' D R D' R' D R D' U'

- **2n cas:** Aquest és el mateix cas que el primer, tot i que canvia el fet de que els dos vèrtexs mal orientat, tenen les dues cares dels quadradets que han d'anar a la cara U, oposades, és a dir, una es troba a la cara F i l'altra a la cara B, de la manera que es pot observar a continuació:

Per a poder resoldre aquest cas, cal seguir la seqüència descrita:
R' D R D' R' D R U R' D' R D R' D' R U'

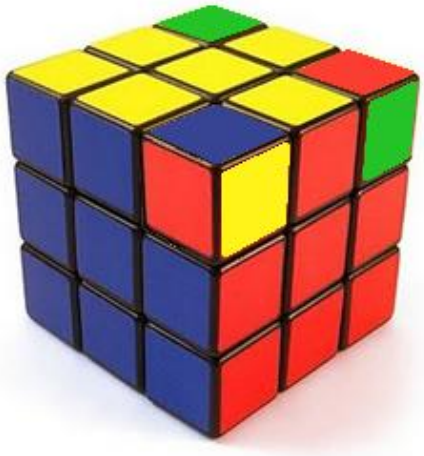
- **3r cas:** És molt similar al segon cas, ja que la disposició dels quadradets que han d'anar a la cara superior dels dos vèrtexs mal orientats, és la mateixa, però en comptes d'estar de costat, estan en diagonal. Veure imatge:

Pel fet de ser similar al segon cas, s'haurà de seguir la mateixa seqüència, únicament canviarà un petit moviment al centre de la seqüència que en comptes de ser U, és U2:
R' D R D' R' D R U2 R' D' R D R' D' R U'

- **4t cas:** Cal utilitzar-lo quan queden tres vèrtexs per orientar correctament i col·loquem el primer vèrtex mal orientat en la posició FUR del cub de tal manera que els dos altres vèrtexs mal orientats quedin seguits del primer seguint un gir en sentit antihorari:
-

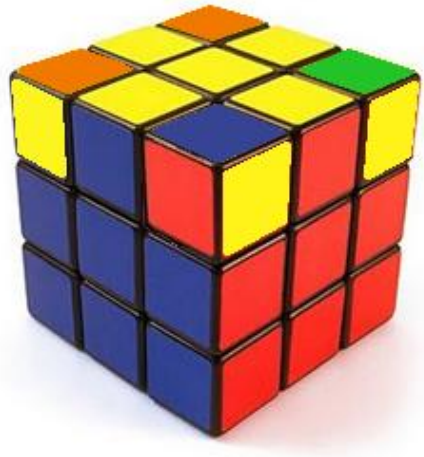
L'algoritme que és necessari seguir és:
D R' D' R D R' D' R D R' D' R D R' D' R U D R' D' R D R' D' R U' + cas 1

- **5è cas:** Igual al quart cas, únicament canvia que, el quadradet que ha d'anar a la cara superior del vèrtex col·locat a la posició FUR, es troba a la cara F tal i com mostra la imatge:



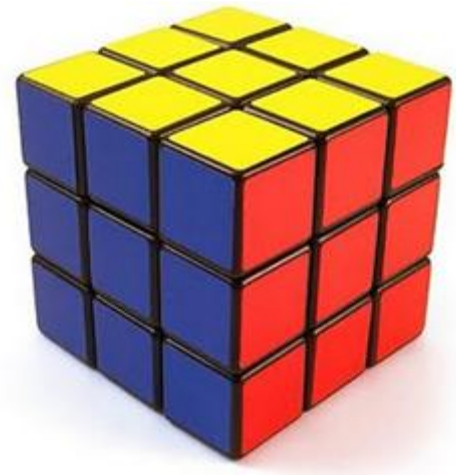
Per tant, caldrà seguir l'algoritme descrit a continuació:
R' D R D' R' D R D' R' D R D' R' D R U D' R' D R D' R' D R D' U' + cas 2

- **6è cas:** Trobem aquest cas quan els quatre vèrtexs estan mal col·locats de la manera que es pot observar:



Es tracta d'aparellar-los de tal manera que primer s'orientaran dos seguint el primer cas, com si la resta estigués ja resolt. I finalment, cal orientar correctament les altres dues seguint el segon cas:
1r cas + 2n cas

Si s'han seguit tots els passos correctament, com a resultat final, obtindrem el Cub de Rubik complet:

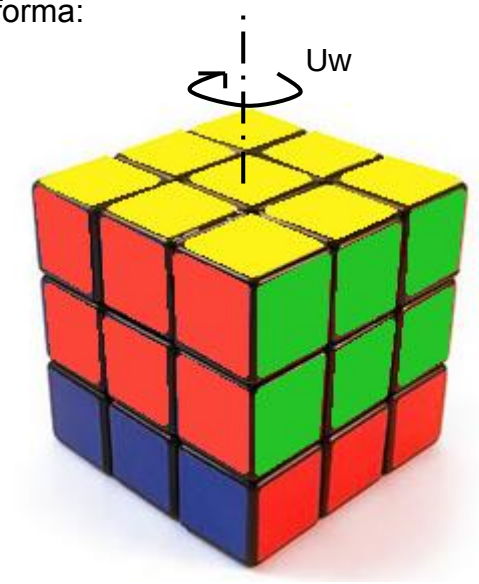


10.2 MÈTODE PER A EXPERTS (Fridrich)

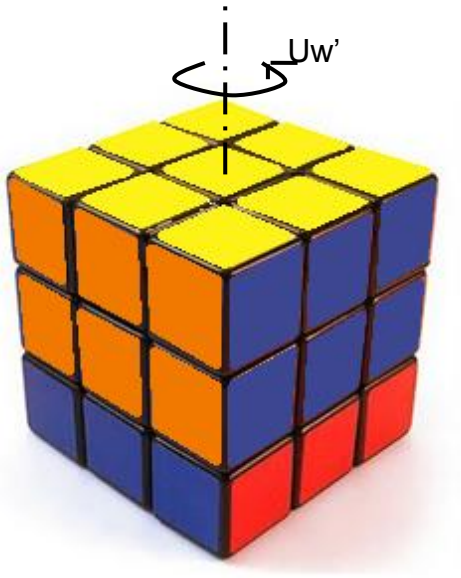
10.2.1 Notació Avançada

Per a seguir el mètode per a experts, és necessari tenir clar alguna notació a més de la ja explicada en la notació simple. Aquesta notació fa referència a diferents moviments del cub que seran essencials per a aquesta resolució.

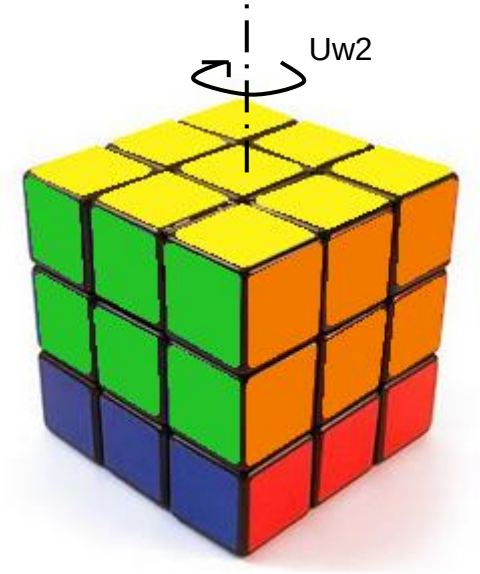
El primer moviment que trobem que presenta una notació específica no explicada anteriorment, és el moviment en bloc. Aquest consisteix en fer un moviment rotatori d'una cara juntament amb la capa anterior. El moviment s'expressarà amb la mateixa lletra com en el moviment bàsic, amb majúscula, seguit de "w": Fw, Bw, Rw, Lw, Uw, Dw.
A continuació, es pot observar un exemple dels sis moviments possibles expressats d'aquesta forma:



De la mateixa manera que en els moviments simples, per expressar que es giraven 90º en sentit antihorari, s'utilitzava una cometa (‘), per expressar moviments de bloc, en sentit ntihorari, també afegirem una cometa al darrere del nom, de manera que quedarà: Fw', Bw', Rw', Lw', Uw', Dw'.
Seguidament es pot veure un exemple dels moviments explicats anteriorment:



Relacionat amb aquest moviment de bloc, trobem el moviment giratori de 180º en sentit horari de les dues capes, com els anteriors. Aquest moviment determinat l'expressarem de la manera: Fw2, Bw2, Rw2, Lw2, Uw2, Dw2. El moviment expressat anteriorment, és exactament el mateix que fer girar-lo 180º en sentit antihorari.
Com a exemple ens podem trobar el moviment:



Com a segon moviment que cal conèixer per a poder completar el Cub és aquell que s'utilitza per expressar moviments de les capes interiors. Per tant, trobem tres anells diferents, l'anell M que és aquell que es troba paral·lelament entre la cara R i la cara L, l'anell E és el que es troba entre la cara U i la cara D, i finalment l'anell S, és el que es troba paral·lel a la cara F i la cara B
Quan trobem la lletra sola, ens expressa que s'ha de moure l'anell 90º en sentit horari, de forma que: l'anell M seguirà la mateixa direcció que la cara L, l'anell S, seguirà la mateixa direcció que la cara F, i finalment l'anell E, seguirà la mateixa direcció que la cara D.
Per tant, ens trobarem que els anells es mouran de la següent manera:

Moviment de l'anell M

Moviment de l'anell S

Moviment de l'anell E

El mateix moviment anterior, però en sentit antihorari, s'expressarà de la forma: M', S' i E'. Aquests moviments quedaran de la manera:

Moviment M'

Moviment S’

Moviment E’

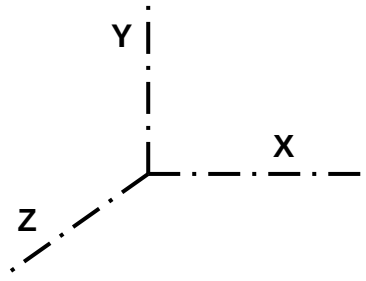
Com a última variació dels moviments dels anells interiors, trobem el moviment que fa referència a fer girar 180º l’anell, i s’expressarà de la manera: nom de l’anell + 2. Per tant, quedarà: M2, S2 i E2.

Moviment M2

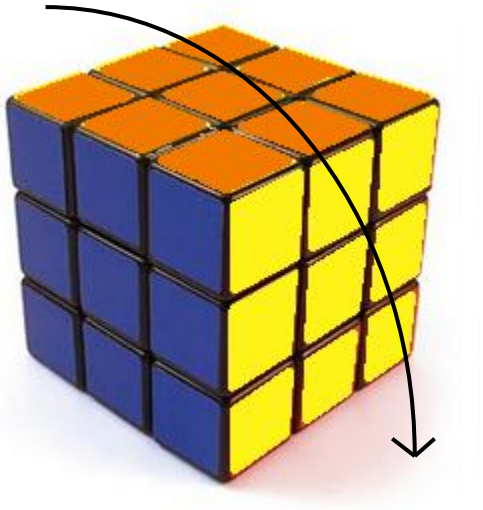
Moviment S2

Moviment E2

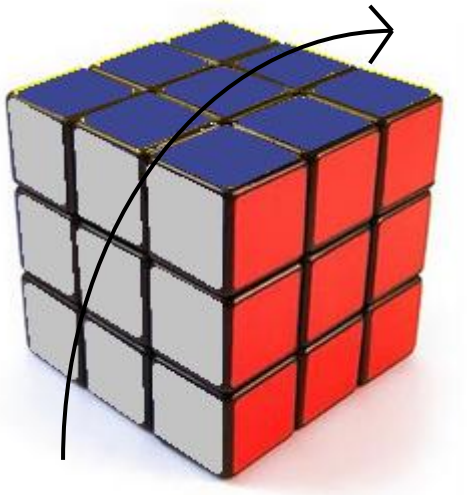
Finalment, com a últim moviment necessari a conèixer per poder completar el cub utilitzant el mètode d'experts, és a l'hora de fer rotar el cub sencer.
En aquesta part, s'utilitzen els eixos X, Y i Z, anomenats anteriorment en l'apartat de moviments que deixen el cub invariable. En aquest apartat anomenat anteriorment, he utilitzat els eixos de manera diferent que en aquest apartat. Per tant, per no confondre, aquí hi ha un breu dibuix dels eixos utilitzats en aquesta part:



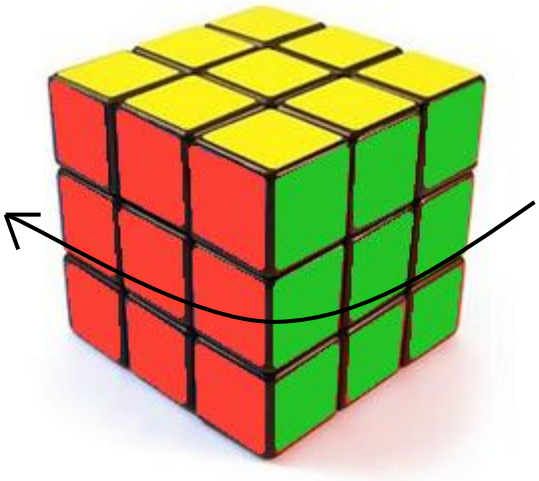
A l'hora de fer-lo rotar 90º en sentit horari, trobem tres possibilitats: fer-lo rotar en l'eix de les Z seguin el sentit de la cara F, fer-lo rotar en l'eix de les X seguint el sentit de la cara R, i per últim, fer-lo rotar en l'eix de les Y seguint el sentit de la cara U.



Rotació per l'eix Z

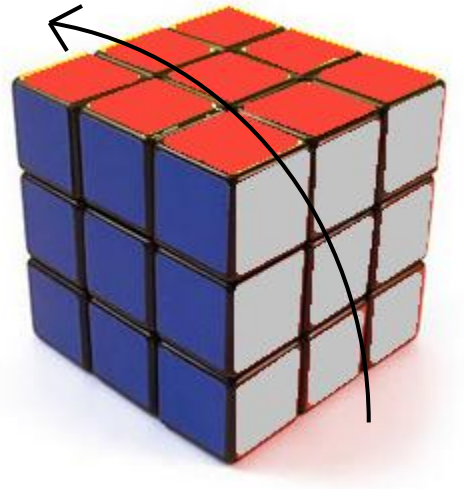


Rotació per l'eix X

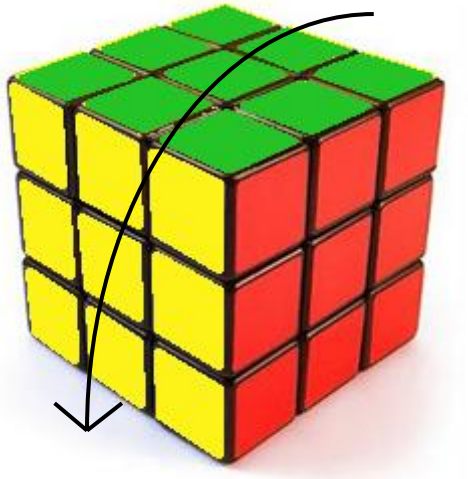


Rotació per l'eix Y

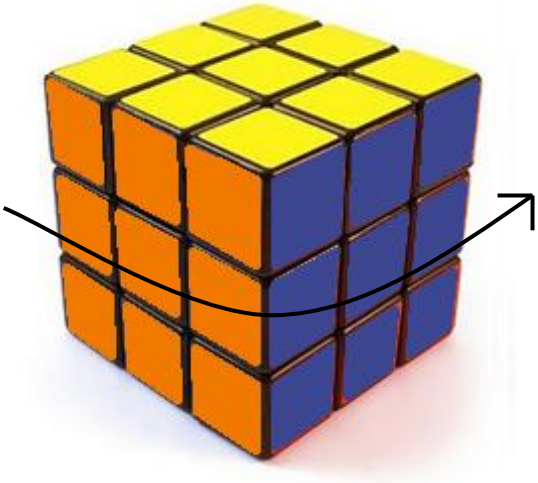
Com en tots els moviment, també hi ha la possibilitat de fer-lo rotar 90º, però en sentit antihorari, per tant, amb aquest moviment també és possible, i per expressar-lo es farà de la manera següent: Z', X' i Y'.



Moviment Z'



Moviment X'

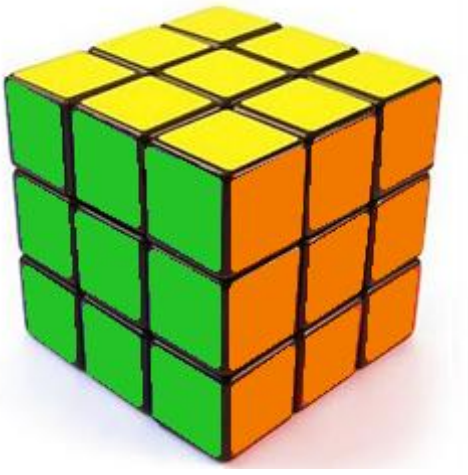


Moviment Y'

Per acabar, com a últim dels possibles moviments de tot el cub, trobem quan volem fer rotar el cub 180º, tant en sentit horari com en sentit antihorari, ja que obtindrem de posició final el mateix, per tant, l'expressarem de la forma: nom del moviment + 2 : Z2, X2 i Y2.

Moviment Z2

Moviment X2



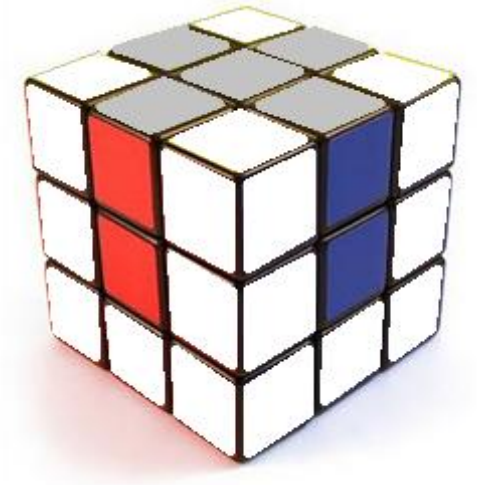
Moviment Y2

.

10.2.2 Resolució per experts

Aquest procediment explicat a continuació és el que s'utilitza per a l' "speedcubing", que consisteix en poder completar el Cub el més ràpid possible. És el mètode més utilitzat en les competicions del Cub de Rubik ja que s'utilitza el mètode de Fridrich. Aquest mètode és més complicat que el de principiants, ja que cal molta dedicació per a poder memoritzar-lo i molta pràctica per a poder aconseguir bons temps en les competicions.
Consisteix en resoldre el Cub en quatre passos:

1. **La creu:** És exactament la mateixa etapa que la primera en l'apartat de resolució per a principiants. Tracta d'aconseguir la creu de la cara inferior tal i com es mostra en la imatge:



   Un cop obtinguda la posició mostrada, és necessari que la cara grisa de la imatge, que es troba en posició U, es col·loqui en posició D, és a dir, a l'inferior del cub.

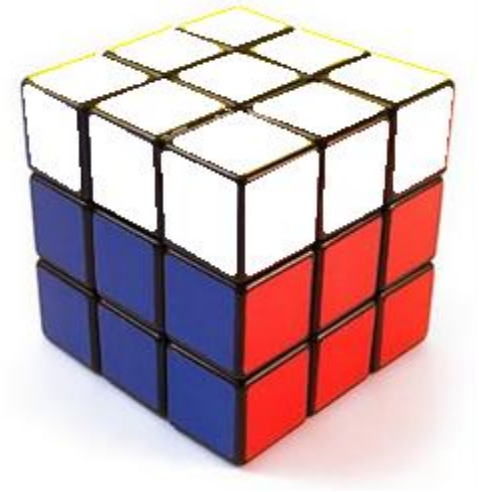
2. **F2L (First Two Layers):** Aquesta etapa es basa en resoldre la primera i la segona capa del cub amb un sol pas, es pot dir que és la fusió del segon i tercer pas del mètode per a principiants.
   Per a completar aquesta etapa, hi ha una gran quantitat de possibles posicions inicials, i es necessita una gran memorització per a poder recordar el moviment necessari depenent del problema en què et trobes. Es tracta de col·locar el vèrtex de la primera corona i l'aresta de la segona corona a la vegada, de tal manera que es completin els dos primers pisos del cub a la vegada.
   L'aparellament del vèrtex i l'aresta, s'anomena "parell", i per tant, l'etapa es finalitza quan els 4 parells estan col·locats al seu lloc corresponent.

   La resolució d'aquesta etapa, seguint els algoritmes, es pot trobar en les dues pàgines web següents:

   http://www.rubikaz.com/speed/f2l2capas.php
   http://www.rubik.cat/resoluci%C3%B3/cub-de-rubik-fridrich/f2l

Degut a la gran quantitat de possibilitats, no em seria possible exposar-les totes en el treball.

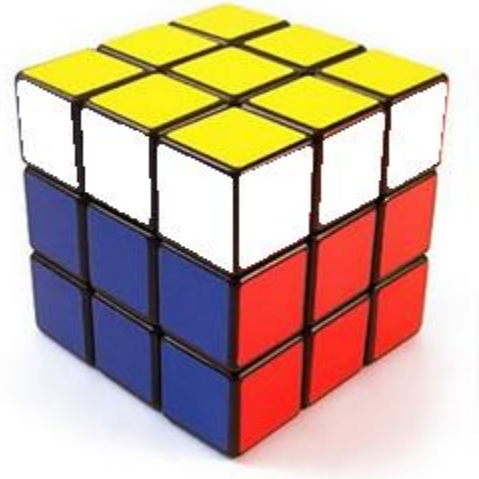
El resultat obtingut al final d'aquesta etapa si s'ha realitzat correctament és el següent:



3. **OLL (Orientation Last Layer):** Aquesta tercera etapa consisteix en orientar correctament totes les peces de l'última capa, de tal manera que la capa superior sigui del mateix color.
   Degut a que hi ha molts casos possibles, jo només indico dues pàgines que expressen totes les possibles variacions que ens podem trobar i es pot utilitzar per poder completar l'etapa:

   http://www.rubikaz.com/speed/oll.php
   http://www.rubik.cat/resoluci%C3%B3/cub-de-rubik-fridrich/oll

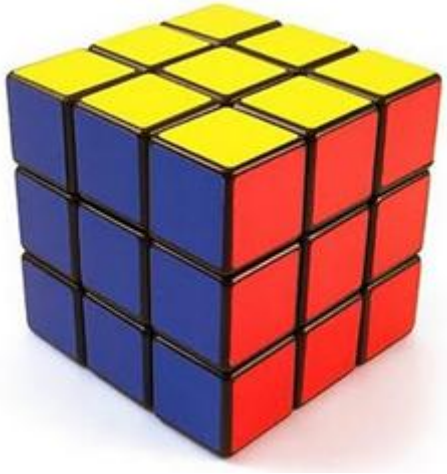
   Un cop completada l'etapa, hem de poder observar el cub de la manera següent:



4. **PLL (Permutation Last Layer):** Aquesta és la última etapa del mètode Fridrich, i consisteix en permutar, és a dir, moure les peces de tal manera que no es desordeni la capa superior i aconseguir complet el Cub de Rubik.

   Com en les dues etapes anteriors, hi ha molts possibles casos, i per tant, també indico dues pàgines que serviran per seguir els algoritmes que et proposen i aconseguir completar el Cub:
   http://www.rubikaz.com/speed/pll.php
   http://www.rubik.cat/resoluci%C3%B3/cub-de-rubik-fridrich/pll

Si es segueixen els passos correctament, al final obtindrem el Cub de Rubik complet de la manera que mostra la imatge:



10.3 RESOLUCIÓ A CEGUES (Blindfold)

El mètode de la resolució del Cub de Rubik a cegues consisteix en completar el cub sense mirar-lo, després d'haver-lo inspeccionat prèviament durant uns segons.
No és un mètode especialment complicat, ja que simplement, s'han de seguir les mateixes instruccions que en totes les resolucions anteriors, però la seva dificultat rau en el fet que cal memoritzar tota la seqüència de moviments donat que no es pot mirar el cub en cap moment de la seva resolució.
Així doncs, el mètode consta de dues fases: memorització i execució.
Quan es parla de la fase de memorització, ens referim al temps que dediquem a simplement mirar el cub per a aprendre on estan col·locades les peces per després poder-lo completar. La fase d'execució fa referència al temps que dediquem a resoldre el cub seguint els passos adequats a cada situació.
La fase d'execució es pot subdividir en orientació i permutació, i també cada una de les dues subfases d'orientació i permutació es poden dividir, primer en arestes i seguidament en vèrtexs, de tal manera que l'esquema seria:

- **Memorització**
- **Execució:**
  - **Orientació:**
    - Arestes
    - Vèrtexs
  - **Permutació:**
    - Arestes
    - Vèrtexs

Amb la finalitat de no allargar excessivament el treball, em limitaré a proposar una pàgina web molt entenedora, http://www.rubik.cat/resoluci%C3%B3/3x3x3-a-cegues , per tal de que el lector que hi estigui interessat pugui aprofundir en aquest apartat.

L'objectiu principal del mètode, a part d'aconseguir completar el Cub de Rubik amb els ulls tapats, és moure una peça deixant la resta del cub invariat, i d'aquesta manera, tenir el control de cada peça del cub en tot moment.

Degut a la complexitat a l'hora d'explicar el mètode, proposo una pàgina web molt entenedora per a poder assolir l'objectiu del mètode: aconseguir completar el Cub de Rubik amb els ulls tancats o tapats:

10.4 ALTRES MODALITATS DE RESOLUCIÓ

A més d'aquestes tres modalitats que he esmentat anteriorment, n'hi ha moltes més, que no comentaré, però que si les esmentaré ja que n'hi ha de curioses:

- Resoldre el cub de 3x3x3 amb una sola mà
- Resoldre el cub de 3x3x3 amb els ulls tancats
- Resoldre el cub sota l'aigua (sense respirar)
- Resoldre el cub amb els peus
- Resoldre dos cubs simultàniament (una amb cada mà)
- Resoldre cubs amb un nombre major d'arestes:
    - 2 Cubs d'aresta (2x2x2)
    - 4 Cubs d'aresta (4x4x4)
    - 5 Cubs d'aresta (5x5x5)
- Resoldre variacions del cub:
    - Pyraminx
    - Megaminx
    - Rubik's Magic
    - Rubik's Mastermagic

No totes les modalitats esmentades anteriorment, se'n fan competicions als campionats. Depenent de la durada del campionat i les dimensions, és a dir, la quantitat de participants, es fan més o menys modalitats.

CONCLUSIONS

Vaig començar aquest treball amb l'objectiu principal d'elaborar un manual d'instruccions per a resoldre el Cub de Rubik. Al començar a buscar informació, vaig trobar que hi ha més d'un mètode per resoldre el cub, depenent del nivell d'experiència de cada persona, i la manera de voler-lo resoldre: principiant, experts (fridrich) i a cegues (blindfold). Per això, finalment he explicat els tres mètodes diferents, amb la seva corresponent notació.

Previ a l'elaboració del manual, he hagut de buscar informacions referents al cub elemental, entre d'altres: els seus desplegaments, els nombres reals que s'hi poden trobar, els moviments giratoris i simetries, el tipus d'estructura algebraica que forma i com intervé en l'art i l'arquitectura.
Buscar tots aquests apartats m'han portat hores de treball, però també m'ha aportat una gran quantitat de coneixements que no tenia i que realment he trobat molt enriquidors.

Alguns dels apartats esmentats anteriorment, contenen un elevat nivell matemàtic, i per això, he necessitat l'ajuda del professor de matemàtiques, Gabriel Plana que, amb algunes hores extra, m'ha posat al corrent de nous conceptes. També ho he completat amb l'ajuda de llibres i pàgines d'internet. Tot i així, el meu treball és molt pràctic i la major part consta de comprovacions matemàtiques. Això ha portat a que a l'hora de redactar, he hagut de tenir en compte que no tots els lectors del treball tindran un nivell de matemàtiques.

També he tingut l'ajuda de l'arquitecte Arnau Vergés, que m'ha permès veure en quin sentit el cub està implicat en l'arquitectura actual. I la veritat és que he vist que realment és una forma geomètrica molt comuna en les construccions.

Quasi tots els dibuixos que es poden trobar en aquest treball, els he fet jo a partir del programa *GeoGebra*, tot i que també m'ha estat necessari aprendre'n part del funcionament abans d'utilitzar-lo.

Un cop acabat el treball, veig clar que el món de les matemàtiques realment m'interessa. I per tant, puc afirmar que m'ajudarà en la meva decisió orientada als meus estudis universitaris futurs: les matemàtiques.

VALORACIÓ PERSONAL

Puc afirmar que estic realment satisfeta del resultat final del meu treball, ja que he complert els objectius que m'havia marcat inicialment. La meva idea principal era parlar únicament del Cub de Rubik, però aviat em vaig donar compte de que no podia parlar directament del Cub de Rubik, sinó que prèviament havia de treballar algunes de les característiques i propietats del cub. Mai m'hagués imaginat que hi havia tanta matemàtica dins d'un senzill cub!

Degut a que volia donar un sentit matemàtic al meu treball, vaig aprofitar la part més teòrica del cub per a estudiar-lo matemàticament i arribar a alguna conclusió, com per exemple, que els moviments giratoris d'un cub formen un grup tancat.

Una vegada introduïda amb el Cub de Rubik, he vist que el meu coneixement era molt limitat, i he pogut aprendre coses molt interessants d'una manera molt amena.

Per afegir més informació al meu treball, vaig anar a Barcelona per poder presenciar en directe l'Open de Barcelona (concurs del Cub de Rubik). Arrel d'aquesta visita, he conegut molta gent introduïda en el món del Cub de Rubik que han estat en tot moment a la meva disposició, i he aprofitat per preguntar-los-hi alguns dubtes sobre el treball i curiositats pròpies. He pogut comprovar que darrere del Cub de Rubik hi ha un cercle de gent molt implicada i apassionada en aquest món.

Resumint: M'ho he passat bé, he après matemàtiques, he descobert coses noves i he conegut persones molt interessants.

AGRAÏMETS

No voldria acabar aquest treball sense esmentar el meu agraïment a totes aquelles persones que m'han ajudat d'una manera o altra.

En primer lloc al meu assessor del treball i professor de matemàtiques, Gabriel Plana, per totes aquelles hores que ha dedicat a explicar-me conceptes matemàtics que eren imprescindibles per al treball i jo no coneixia; també per tota la paciència que m'ha dedicat, revisant-me el treball i corregint els errors que havia comès.

Seguidament, a la meva família: Als meus pares i al meu germà per tot el suport moral que m'han donat en tot moment, per haver-me ajudat en algun aspecte del treball i especialment a la meva cosina Núria Matabosch, per haver-me ajudat en el redactat d'alguna part del treball.

També vull agrair el temps que m'ha dedicat l'arquitecte Sr. Arnau Vergés, explicant-me els seus projectes, responent-me a les preguntes que li vaig fer i proporcionant-me diversa informació.

Finalment, a les meves amigues pel suport que m'han donat en tot moment, a totes aquelles persones que m'han cedit diferents Cubs de Rubik i que s'han posat a la meva disposició per ajudar-me amb el treball, i a la gent del Club de Rubik a Catalunya.

BIBLIOGRAFIA

Pàgines web:

- NATALIA BOAL, MARIA LUISA SEIN-ECHALUCE. *Estructuras algebraicas.* Universitat de Saragossa [En línea] <http://ocw.unizar.es/ocw/ensenanzas-tecnicas/algebra-para-ingenieria/teorias/EstructurasAlgebraicas.pdf> [Consulta: 23 Juliol de 2011]

- PETER J. CAMERON. *Notes on Aljebraic Structures.* Universitat de Londres [En línea]: 13 d'Abril del 2006. <http://www.maths.qmul.ac.uk/~pjc/notes/algstr.pdf> [Consulta: 23 Juliol de 2011]

- JUAN PUERMA MEDEL. *Poliedros Regulares* .Granada [En línea]: 2001. <http://perso.wanadoo.es/jpm/poliedros%20regulares/poliedros.html> [Consulta: 19 Juliol de 2011]

- *Conjuntos comunes de números* [En línea]: 2008 <http://www.disfrutalasmatematicas.com/conjuntos/conjuntos-numeros-comunes.html> [Consulta: 5 Agost de 2011]

- MARY BELLIS, *Rubik and the Cube – Rubik's Cube*. New York [En línea]: 2011 <http://inventors.about.com/od/rstartinventions/a/Rubik_Cube.htm> [Consulta: 12 Agost de 2011]

- RON VAN BRUCHEM. *World Cube Assosiation Official Results.* [En línea] <http://www.worldcubeassociation.org/results/competitions.php> [Consulta: 16 Juliol de 2011]

- KURAMA. *Club de Rubik de Catalunya*. Barcelona [En línea]: 31 Maig de 2011. <http://www.rubik.cat/> [Consulta: 12 Agost de 2011]

- *Krubik.com*. Espanya [En línea]: 2011 <http://www.rubikaz.com/> [Consulta: 3 Setembre de 2011]

Llibres:

- BURGOS, Alfonso. *Iniciación a la matemàtica moderna.* Quarta edició. Madrid: Selecciones Científicas, 1972. p. 227-246.

- WARUSFEL, André. *Cómo jugar y divertirse con EL CUBO MAGICO DE RUBIK.* Soluciones para el juego del siglo con prólogo de E. Rubik. Primera edició. Madrid: Altalena, 1981. 143 pàgines.

- A.V. *Matemáticas.* Diccionario esencial. Segona edició. Barcelona: Larousse Editorial, 2011. 407 pàgines.